

Math  
9375

**Beiträge**  
zur  
**meteorologischen Optik**  
und  
zu verwandten Wissenschaften.

---

In zwanglosen Heften

herausgegeben

von

**Johann August Grunert,**

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München und der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften zu Upsala, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

Erster Theil. Erstes Heft.

Mit einer lithographirten Tafel.

**Leipzig,**  
Verlag von E. B. Schwickert.  
**1848.**

307 84







**B e i t r ä g e**  
zur  
**meteorologischen Optik**  
und  
zu verwandten Wissenschaften.

---

**In zwanglosen Heften**

herausgegeben

von

***Johann August Grunert,***

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München und der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften zu Upsala, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

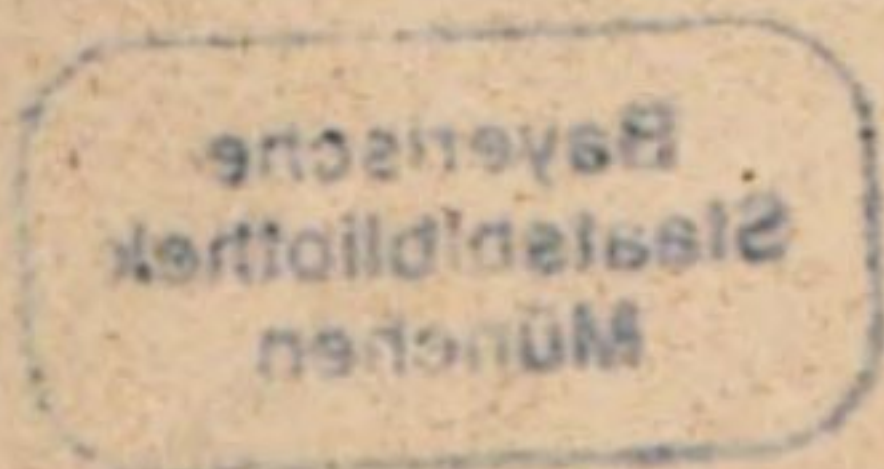
**Erster Theil. Erstes Heft.**

Mit einer lithographirten Tafel.

---

**Leipzig, 1848.**

**Verlag von E. B. Schwickert.**





BIBLIOTHECA  
ECCLESIAE  
MONACENSIS

Bayerische  
Staatsbibliothek  
München



## I.

# Theorie des Regenbogens.

Von dem Herausgeber.

---

## Einleitung.

Die Theorie des Regenbogens, so wie sie unter den älteren Physikern und Mathematikern zuerst durch Newton, ohne der grösseren Anzahl seiner allerdings auch mehrfach verdienten Vorgänger, durch welche diese Theorie vorbereitet wurde, jetzt weiter zu denken, in der meisten Vollendung dargestellt worden ist, gehört unstreitig zu dem Schönsten, was auf dem Felde der mathematischen Naturforschung, ja der Naturforschung überhaupt, jemals geleistet worden ist, und darf unbedenklich als ein wahres Muster für die Art und Weise, wie eine Naturerscheinung erklärt werden soll, aufgestellt werden. Indess scheint dieselbe doch noch Einiges zu wünschen übrig zu lassen, was auch schon andere mathematische Physiker gefühlt haben, indem z. B. einer der ausgezeichnetsten deutschen Astronomen, der auch als Staatsmann mit Recht hochberühmte und hochgeachtete vormalige Königlich Sächsische Staatsminister, Herr B. v. Lindenau, sich in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger. Zweiter Band. Stuttgart. 1816. S. 350. auf folgende Art über diese Theorie äussert: „Wir mögen bei dieser Gelegenheit den Wunsch nicht unterdrücken, dass ein gewandter Physico-Mathematiker die Theorie des Regenbogens überhaupt einer neuen eigenenthümlichen Behandlung unterwerfen möchte; denn wenn auch unsere



heutige Theorie nach Halley, Newton, Bernoulli u. A. das hauptsächlichste dieser Erscheinungen genügend darstellt, so kommen einmal doch noch bei weitem nicht befriedigend daraus zu erklärende Erscheinungen vor, und dann liegt auch in jener Theorie selbst eine gewisse Verwicklung, die uns glauben lässt, dass der rechte Weg darinnen noch nicht genommen worden sei.“ Wenn auch diese Worte schon im Jahre 1816 geschrieben sind, so, glaube ich, haben dieselben doch auch gegenwärtig noch ihre volle Richtigkeit; denn ich wüsste nicht, dass seit jener Zeit Etwas von Bedeutung für die weitere Ausbildung der mathematischen Theorie dieser das Interesse eines jeden denkenden Menschen in so hohem Grade lebhaft in Anspruch nehmenden prachtvollen Naturerscheinung geleistet worden wäre, da dieselbe, wie man sie z. B. — unter den vorhandenen Lehr- und Wörterbüchern der Physik und Meteorologie nach meiner Ansicht am besten — in dem Lehrbuche der Meteorologie von L. F. Kämtz. Dritter Band. Halle. 1836. S. 151. hauptsächlich nach Schmidt (Analytische Optik. S. 431.) dargestellt findet, sich von der älteren Theorie nicht wesentlich unterscheidet, und auch bei der Darstellung in diesem älteren Gewande namentlich rücksichtlich der nothwendigen Allgemeinheit und Bestimmtheit der betreffenden analytischen Ausdrücke manche Punkte unberücksichtigt lässt, die nach meiner Ansicht nicht unberücksichtigt bleiben dürfen, wenn man der Darstellung alle erforderliche Strenge verleihen will. Ich halte es daher keineswegs für überflüssig, diese Theorie einmal ganz von Neuem vorzunehmen, und werde dieselbe in der vorliegenden Abhandlung auf zwei verschiedenen Wegen darstellen, von denen der erste sich der älteren, allerdings durch ihren mehr geometrischen Charakter sich vortheilhaft auszeichnenden, und namentlich durch diesen mehr geometrischen Charakter das Interesse in Anspruch nehmenden Richtung im Wesentlichen zwar anschliesst, der Darstellung aber alle nöthige geometrische Strenge und die gehörige Allgemeinheit zu verleihen sucht, der zweite dagegen sich der Hülfsmittel bedient, welche die neuere analytische Geometrie namentlich dann, wenn man möglichst grosse Allgemeinheit zu erstreben beabsichtigt, in so reichlichem Masse darbietet, wobei zugleich bemerkt werden mag, dass dieser zweite Weg hauptsächlich von den in meinen Optischen Untersuchungen. Erster Theil. Leipzig. 1846. S. 34. Nr. 50. entwickelten allgemeinen Grundformeln der Zurückwerfung und Brechung des Lichts seinen Auslauf nehmen wird. Dann werde ich aber auch hauptsächlich meine Ansicht über diejenigen Punkte darlegen, welche, von der



Newton'schen Theorie unberücksichtigt gelassen, nach den schon von Pemberton und Hellwag in älterer Zeit versuchten Erklärungen, namentlich einige neuere Physiker, insbesondere Venturi und Brandes von der einen, so wie Young, Arago und Airy von der anderen Seite, so viel als möglich aufzuklären sich bemühet haben. Ueberhaupt werde ich in dieser Abhandlung, ausser meinen eigenen Untersuchungen und vielfachen Entwicklungen, zugleich den ganzen gegenwärtigen wahren Bestand unserer Kenntnisse von dem Regenbogen dem Leser vorzulegen versuchen, so weit es ohne zu grosse Weitläufigkeit und — was ich absichtlich hier ausdrücklich bemerke — ohne mich auf jetzt nicht in meiner Absicht liegende ausführlichere Untersuchungen über die neuere physikalische Theorie des Lichts, welche letzteren mich die dieser Abhandlung gesteckten Grenzen weit zu überschreiten nöthigen würden, einzulassen, geschehen kann. Will man es als einen Mangel dieser Abhandlung erklären, dass ich mich in derselben auf die neuere physikalische Theorie des Lichts, namentlich rücksichtlich eigentlicher analytischer Entwicklungen, für jetzt nur wenig einlasse, so muss ich mir das gefallen lassen; ich kann nun einmal meine Ansichten über diesen Gegenstand, welche ich weiter unten ausführlicher auseinandersetzen werde, nicht aufgeben, will aber damit keinesweges in Abrede stellen, dass ich späterhin, wenn mich die weitere Fortsetzung meiner oben erwähnten optischen Untersuchungen specieller auf die neuere physikalische Theorie des Lichts führen wird, noch zu diesen Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die Theorie des Regenbogens in einer derselben gewidmeten zweiten Abhandlung zurückkehren werde, bis zu welchem Zeitpunkte sich also die an diesen meinen optischen Untersuchungen überhaupt Interesse nehmenden geehrten Leser zu gedulden belieben mögen. Eine allgemeine Kenntniss des Phänomens des Regenbogens an sich und der Grundzüge der Newton'schen Theorie desselben glaube ich in dieser Abhandlung voraussetzen zu dürfen berechtigt zu sein, indem ich in derselben nicht das wiederholen will, was ein Jeder in den gewöhnlichen physikalischen Lehr- und Wörterbüchern leicht nachlesen kann; und eben so wenig halte ich es für nöthig, mich in dieser Abhandlung über die gleichfalls schon häufig behandelte Geschichte der Theorie des Regenbogens zu verbreiten, über welche z. B. Brandes in dem betreffenden Artikel des neuen Gehler'schen physikalischen Wörterbuchs alles Wissenswerthe in ziemlicher Vollständigkeit zusammengestellt hat, worauf mir daher hier zu verweisen erlaubt sein mag.



## Theorie des Regenbogens.

### §. 1.

Alles kommt bei der Entwicklung der Theorie des Regenbogens zuerst auf die sorgfältige Betrachtung des Wegs an, welchen ein Lichtstrahl verfolgt, der, nachdem er an dem Umfange eines Kreises, in dessen Ebene alle folgenden Betrachtungen angestellt werden, von Aussen her in diesen Kreis tretend, eine Brechung erlitten hat, an der inneren concaven Seite dieses Kreises eine oder einige Zurückwerfungen erleidet, und dann, nachdem er eine zweite Brechung an dem Umfange des Kreises erlitten hat, wieder aus demselben austritt. Dieser Untersuchung müssen aber einige geometrische Betrachtungen vorausgeschickt werden, welche an sich zwar sehr einfach, aber für die in Rede stehende Untersuchung von der grössten Wichtigkeit sind, und deshalb, wie wir jetzt in den beiden nächstfolgenden Paragraphen zuvörderst versuchen wollen, mit möglichster Allgemeinheit und Strenge angestellt werden müssen, weil ohne diese Allgemeinheit und Strenge der ganzen folgenden Untersuchung eine sichere Grundlage fehlen würde.

### §. 2.

Wir wollen uns einen um den Mittelpunkt  $O$  mit beliebigem Halbmesser beschriebenen Kreis, und von dem Mittelpunkte  $O$  aus zwei Halbmesser  $OA$  und  $OA'$  desselben gezogen denken, welche die Peripherie des Kreises in den Punkten  $A$  und  $A'$  schneiden. Diese beiden Halbmesser schliessen an dem Mittelpunkte  $O$  zwei sich zu  $2\pi^*)$  ergänzende Winkel ein, von denen wir im Folgenden nur den einen bestimmt in's Auge fassen und durch  $\Omega$  bezeichnen wollen, wo also  $\Omega$  positiv und nicht grösser als  $2\pi$  ist. Die Verlängerungen der beiden Halbmesser  $OA$  und  $OA'$  über ihre in der Peripherie des Kreises liegenden Endpunkte  $A$  und  $A'$  hinaus seien  $AB$  und  $A'B'$ , welche Linien also ganz ausserhalb des um  $O$  be-

---

\*) Wir wollen in dem ganzen einschliesslich bis §. 9. reichenden ersten Theile dieser Theorie des Regenbogens, wenigstens in den allgemeinen Formeln, absichtlich überall diese Art der Winkelmessung, nicht die Messung durch Grade gebrauchen.



schriebenen Kreises liegen. Von den Punkten  $A$  und  $A'$  aus ziehe man ebenfalls ganz ausserhalb dieses Kreises zwei Linien  $AC$  und  $A'C'$ , welche entweder beide innerhalb oder beide ausserhalb des vorher durch  $\Omega$  bezeichneten,  $2\pi$  nicht übersteigenden Winkels liegen, und mit den ausserhalb des Kreises liegenden Verlängerungen  $AB$  und  $A'B'$  der Halbmesser  $OA$  und  $OA'$  über die Punkte  $A$  und  $A'$  hinaus zwei einander gleiche spitze Winkel  $BAC$  und  $B'A'C'$  einschliessen, welche wir im Folgenden beide durch  $i$  bezeichnen wollen. Der Durchschnittspunkt der beiden nöthigenfalls rückwärts über die Punkte  $A$  und  $A'$  hinaus verlängerten Linien  $AC$  und  $A'C'$  sei  $Q$ . Endlich werde der von den als von dem Punkte  $Q$  ausgehend betrachteten Linien  $QC$  und  $QC'$  an dem Punkte  $Q$  als seiner Spitze eingeschlossene,  $2\pi$  nicht übersteigende, von dem Punkte  $Q$  aus nach derselben Seite wie von dem Punkte  $O$  aus der Winkel  $\Omega$  hin liegende, und, jenachdem der Punkt  $Q$  in dem Winkel  $\Omega$  selbst oder in seinem Ergänzungswinkel zu  $2\pi$  liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Winkel durch  $\Theta$  bezeichnet. Dann hat man, um zwischen den Winkeln  $\Omega$ ,  $\Theta$ ,  $i$  eine Gleichung zu finden, die folgenden Fälle zu unterscheiden.

Wenn, wie durch Taf. I. Fig. 1. erläutert wird, der Winkel  $\Omega$  kleiner als  $\pi$  ist und die Linien  $AC$  und  $A'C'$  beide innerhalb desselben liegen; so ist, wie leicht erhellen wird, in dem Vierecke  $AOA'Q$  entweder

$$\Omega + \Theta + 2(\pi - i) = 2\pi$$

oder

$$(2\pi - \Omega) + (-\Theta) + 2i = 2\pi;$$

also, wie hieraus leicht folgt,

$$\Theta + \Omega = 2i.$$

Wenn, wie durch Taf. I. Fig. 2. erläutert wird, der Winkel  $\Omega$  kleiner als  $\pi$  ist und die Linien  $AC$  und  $A'C'$  beide ausserhalb desselben liegen; so ist, wie leicht erhellen wird, in dem Vierecke  $AOA'Q$  immer

$$\Omega + (2\pi - \Theta) + 2i = 2\pi;$$

also, wie hieraus leicht folgt:

$$\Theta - \Omega = 2i.$$

Wenn, wie durch Taf. I. Fig. 3. erläutert wird, der Winkel  $\Omega$  grösser als  $\pi$  ist und die Linien  $AC$  und  $A'C'$  beide innerhalb desselben liegen; so ist, wie leicht erhellen wird, in dem Vierecke  $AOA'Q$  immer



$(2\pi - \Omega) + (-\Theta) + 2i = 2\pi;$   
also, wie hieraus leicht folgt,

$$\Theta + \Omega = 2i.$$

Wenn, wie durch Taf. I. Fig. 4. erläutert wird, der Winkel  $\Omega$  grösser als  $\pi$  ist und die Linien  $AC$  und  $A'C'$  beide ausserhalb desselben liegen; so ist, wie leicht erhellen wird, in dem Vierecke  $AOA'Q$  entweder

$$\Omega + (2\pi - \Theta) + 2i = 2\pi$$

oder

$$(2\pi - \Omega) + \{2\pi - (-\Theta)\} + 2(\pi - i) = 2\pi;$$

also, wie hieraus leicht folgt, entweder

$$\Theta - \Omega = 2i$$

oder

$$\Theta - \Omega = 2i - 4\pi.$$

Mit Ausnahme des letzten Falls, in welchem

$$\Theta - \Omega = 2i - 4\pi = 2(i - 2\pi)$$

ist, sind die Summe  $\Theta + \Omega$  und die Differenz  $\Theta - \Omega$  nach dem Vorhergehenden offenbar stets positive Grössen, da dieselben ja durch die positive Grösse  $2i$  dargestellt werden. Nur in dem letzten vorher erwähnten Falle ist, weil unter den gemachten Voraussetzungen offenbar  $2(i - 2\pi)$  negativ ist, die Differenz  $\Theta - \Omega$  eine negative Grösse.

Halten wir diese letztere Bemerkung fest, so fällt auf der Stelle in die Augen, dass sich aus der vorhergehenden Betrachtung im Allgemeinen das folgende Resultat ziehen lässt:

Es ist immer

$$1) \quad \Theta \pm \Omega = 2i,$$

wenn man in dieser Gleichung das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die beiden im Vorhergehenden durch  $AC$  und  $A'C'$  bezeichneten Linien innerhalb oder ausserhalb des Winkels  $\Omega$  liegen, und, im Fall sich die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in obiger Gleichung als negativ erweisen sollte, im zweiten der beiden vorher erwähnten Fälle, wo man das untere Zeichen nehmen muss, der Winkel  $i$  um eine ganze Peripherie, d. h. um  $2\pi$  vermindert wird, bevor man ihn in die obige Gleichung einführt.

Die Bedeutung der einzelnen Symbole, nach den im Vorherge-



henden darüber gegebenen strengen und sichern Vorschriften, braucht hier nicht wiederholt zu werden, da sie aus dem Obigen mit vollkommener Deutlichkeit und Bestimmtheit ersichtlich ist.

( §. 3. )

In den um den Mittelpunkt  $O$  mit beliebigem Halbmesser beschriebenen Kreis in Taf. I. Fig. 5. wollen wir nun von dem in seiner Peripherie beliebig angenommenen Punkte  $A_1$  an die Sehne  $A_1 A_2$ , hierauf von dem Punkte  $A_2$  an die der ersten gleiche Sehne  $A_2 A_3$ , dann von dem Punkte  $A_3$  an die den zwei ersten gleiche Sehne  $A_3 A_4$ , von dem Punkte  $A_4$  an die den drei ersten gleiche Sehne  $A_4 A_5$ , überhaupt auf diese Weise immer nach derselben Seite hin die  $n$  sämtlich unter einander gleichen Sehnen

$$A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A_5, \dots, A_n A_{n+1}$$

eintragen. Ziehen wir dann die Halbmesser

$$OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5, \dots, OA_{n+1}$$

und bezeichnen die sämtlich unter einander gleichen spitzen Winkel an den Grundlinien der gleichschenkeligen Dreiecke

$$OA_1 A_2, OA_2 A_3, OA_3 A_4, \dots, OA_n A_{n+1}$$

durch  $\omega$ ; so ist der Winkel, welchen man durchlaufen muss, um auf dem Wege

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \dots A_{n+1}$$

von dem Halbmesser  $OA_1$  an zu dem Halbmesser  $OA_{n+1}$  zu gelangen, offenbar

$$n(\pi - 2\omega).$$

Den  $2\pi$  nicht übersteigenden Winkel aber, welchen man nach derselben Richtung hin wie vorher durchlaufen muss, um von dem Halbmesser  $OA_1$  zu dem Halbmesser  $OA_{n+1}$  zu gelangen, wollen wir durch  $\Omega$  bezeichnen, und jetzt zu bestimmen suchen. Zu dem Ende bezeichne  $k$  die positive ganze Zahl, für welche

$$k \cdot 2\pi \leq n(\pi - 2\omega) < (k + 1) \cdot 2\pi$$

oder

$$2k\pi \leq n(\pi - 2\omega) < 2(k + 1)\pi$$

ist, so ist

$$k \leq \frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi} < k + 1,$$

und folglich, wenn wir die grösste in dem positiven Bruche



enthaltene positive ganze Zahl durch

$$G \left( \frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi} \right)$$

bezeichnen, offenbar

$$k = G \left( \frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi} \right).$$

Wenn nun zuerst

$$n(\pi - 2\omega)$$

kleiner als  $2\pi$  ist, so ist nach dem Obigen offenbar

$$\Omega (= n\pi - 2\omega),$$

was keiner weiteren Erläuterung bedarf. Wenn aber

$$n(\pi - 2\omega)$$

grösser als  $2\pi$  ist, so muss man, um auf dem Wege

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \dots A_{n+1}$$

von dem Halbmesser  $OA_1$  zu dem Halbmesser  $OA_{n+1}$  zu gelangen, offenbar zuerst den Bogen  $2k\pi$  durchlaufen, wodurch man auf dem vorhergehenden Wege von dem Halbmesser  $OA_1$ , bei beliebig oftmaliger Ueberschreitung desselben, bis wieder zu dem Halbmesser  $OA_1$  gelangt, und dann muss man sich von dem Halbmesser  $OA_1$  bis zu dem Halbmesser  $OA_{n+1}$  noch durch den Bogen

$$n(\pi - 2\omega) - 2k\pi$$

bewegen, welcher, weil

$$2k\pi \leq n(\pi - 2\omega) < (2k + 1)\pi$$

ist, offenbar  $2\pi$  nicht übersteigt; daher ist klar, dass in diesem Falle

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - 2k\pi,$$

d. i. nach dem Obigen

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - 2G \left( \frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi} \right) \cdot \pi$$

oder

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - G \left( \frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi} \right) \cdot 2\pi$$

gesetzt werden muss. Für

$$n(\pi - 2\omega) < 2\pi$$

ist offenbar



$$G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right) = 0,$$

und da nun in diesem Falle nach dem Vorhergehenden

$$\Omega = n(\pi - 2\omega)$$

ist, so kann auch in diesem Falle

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right) \cdot 2\pi$$

gesetzt werden. Wenn endlich

$$n(\pi - 2\omega) = 2\pi$$

ist, so ist

$$G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right) = 1,$$

und aus der Gleichung

$$\Omega = n(\pi - 2\omega) - G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right) \cdot 2\pi$$

ergibt sich also  $\Omega = 0$ , was, wie auf der Stelle erhellet, der Natur der Sache keineswegs widerspricht, vielmehr derselben ganz gemäss ist. Daher sind wir nach der vorhergehenden Betrachtung vollkommen berechtigt, in allen Fällen, also in völliger Allgemeinheit,

$$2) \quad \Omega = n(\pi - 2\omega) - G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right) \cdot 2\pi$$

zu setzen.

Wird der von  $OA_1$  an nach einer der vorhergehenden entgegengesetzten Richtung bis zu  $OA_{n+1}$  durchlaufene,  $2\pi$  nicht übersteigende Bogen durch  $(\Omega)$  bezeichnet, so ist offenbar

$$(\Omega) = 2\pi - \Omega,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$3) \quad (\Omega) = \left\{ 1 + G\left(\frac{n(\pi - 2\omega)}{2\pi}\right) \right\} \cdot 2\pi - n(\pi - 2\omega).$$

Auch sind offenbar  $(\Omega)$  und  $\Omega$  die  $2\pi$  nicht übersteigenden, von  $OA_{n+1}$  bis zu  $OA_1$  respective nach der durch die Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \dots$  vorgezeichneten oder nach der entgegengesetzten Richtung hin durchlaufenen Bogen.



§. 4.

Wir wollen nun annehmen, dass in der Figur des vorhergehenden Paragraphen, auf die wir uns hier wieder beziehen,  $A_1, A_2$  ein durch Brechung bei dem Punkte  $A_1$  in den um den Mittelpunkt  $O$  beschriebenen Kreis getretener Strahl sei, welcher nach und nach bei den Punkten

eine  $A_2, A_3, A_4, A_5, \dots A_n$   
 $1ste, 2te, 3te, 4te, \dots (n - 1)te$

Zurückwerfung erleidet, und vermöge einer zweiten Brechung bei dem Punkte  $A_{n+1}$  wieder aus dem Kreise heraustritt. Der Einfallswinkel und Brechungswinkel bei dem Punkte  $A_1$  seien respective  $i$  und  $i_1$ , so ist offenbar  $i_1$  mit dem im vorhergehenden Paragraphen durch  $\omega$  bezeichneten Winkel einerlei, und der Einfallswinkel und Brechungswinkel bei dem Punkte  $A_{n+1}$  sind, wie auf der Stelle aus der Natur der Sache erhellet, was einer weiteren Erläuterung hier nicht bedarf, respective  $i_1$  und  $i$ . Der  $2\pi$  nicht übersteigende Winkel, welchen man nach der durch die Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \dots$  vorgezeichneten Richtung hin durchlaufen muss, um von  $A_{n+1}$  bis zu  $A_1$  zu gelangen, oder der  $2\pi$  nicht übersteigende Winkel, welchen man nach einer der vorhergehenden entgegengesetzten Richtung hin durchlaufen muss, um von  $A_1$  bis zu  $A_{n+1}$  zu gelangen, ist der im vorhergehenden Paragraphen durch  $(\Omega)$  bezeichnete Winkel. Den  $2\pi$  nicht übersteigenden Winkel aber, welchen der bei  $A_1$  einfallende und der bei  $A_{n+1}$  ausfahrende Strahl vor und nach der Brechung bei diesen Punkten mit einander einschliessen, indem wir diesen Winkel von dem Durchschnittspunkte der beiden in Rede stehenden Strahlen an immer nach derselben Seite hin nehmen wie von dem Mittelpunkte  $O$  des Kreises an den Winkel  $(\Omega)$ , und denselben als positiv oder als negativ betrachten, jenachdem der Durchschnittspunkt der beiden in Rede stehenden Strahlen innerhalb des Winkels  $(\Omega)$  selbst oder innerhalb seines Ergänzungswinkels zu  $2\pi$  liegt, wollen wir im Folgenden durch  $\Theta$  bezeichnen. Nehmen wir hierzunun noch, dass im vorliegenden Falle, wie eine ganz einfache Betrachtung, deren Anstellung einem Jeden füglich selbst überlassen werden kann, zeigt, der bei  $A_1$  einfallende und der bei  $A_{n+1}$  ausfahrende Strahl offenbar immer beide innerhalb des Winkels  $(\Omega)$  liegen müssen; so ergeben sich auf der Stelle aus den Gleichungen 1) und 3), wenn man nur in denselben die Bezeichnung nach den jetzt eingeführten Symbolen gehörig modificirt, die beiden Gleichungen



$$\Theta + (\Omega) = 2i$$

und

$$(\Omega) = \left\{ 1 + G \left( \frac{n(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) \right\} \cdot 2\pi - n(\pi - 2i_1),$$

durch deren Verbindung mit einander man dann ferner auf der Stelle die nachstehende, eine Hauptgrundlage der ganzen folgenden Untersuchung bildende Gleichung erhält:

$$\Theta + \left\{ 1 + G \left( \frac{n(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) \right\} \cdot 2\pi - n(\pi - 2i_1) = 2i.$$

Legen wir aber im Folgenden nicht wie bisher  $n - 1$ , sondern vielmehr  $n$  Zurückwerfungen auf der inneren concaven Seite des Kreises unseren allgemeinen Betrachtungen zum Grunde, so müssen wir in dieser Gleichung  $n + 1$  für  $n$  setzen, und erhalten dadurch sogleich nach einer ganz einfachen Transformation die folgende Gleichung:

$$4) \quad \Theta - (n + 1)(\pi - 2i_1) + G \left( \frac{(n + 1)(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) \cdot 2\pi = 2(i - \pi),$$

mit welcher man noch, wenn in Bezug auf den Punkt, bei welchem vermöge einer in demselben Statt findenden Brechung der Strahl in den Kreis tritt, der reciproke Brechungsexponent durch  $\mu$  bezeichnet wird, die unmittelbar aus dem dioptrischen Grundgesetze fließende Gleichung

$$5) \quad \sin i_1 = \mu \sin i$$

zu verbinden hat. Vermittelst dieser Gleichung kann man, wenn der Winkel  $i$  gegeben ist, den Winkel  $i_1$ , und aus den Winkeln  $i$  und  $i_1$  dann ferner vermittelst der Gleichung 4) den Winkel  $\Theta$  berechnen, durch welchen letzteren Winkel die gegenseitige Lage des einfallenden und ausfahrenden Strahls bestimmt wird.

## §. 5.

Der Winkel  $\Theta$  ist nach dem Vorhergehenden eine Function von  $i$ , und es kann also

$$\Theta = F(i)$$

gesetzt werden. Lässt man nun  $i$  die beliebige Veränderung  $\Delta i$  erleiden, und bezeichnet wie gewöhnlich die dadurch herbeigeführte Veränderung von  $\Theta$  durch  $\Delta \Theta$ ; so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatz bekanntlich



$$\Delta \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial i} \cdot \frac{\Delta i}{1} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} \cdot \frac{\Delta i^2}{1.2}$$

$$+ \frac{\partial^3 \Theta}{\partial i^3} \cdot \frac{\Delta i^3}{1.2.3}$$

u. s. w.

$$+ \frac{\partial^{k-1} \Theta}{\partial i^{k-1}} \cdot \frac{\Delta i^{k-1}}{1 \dots (k-1)}$$

$$+ F^{(k)} (i + \varrho \Delta i) \cdot \frac{\Delta i^k}{1 \dots k},$$

wo  $\varrho$  eine gewisse positive die Einheit nicht übersteigende Grösse bezeichnet. Soll für der Null unendlich nahe kommende Werthe von  $\Delta i$  der entsprechende Werth von  $\Delta \Theta$  der Null besonders nahe kommen, so muss man nach einem in der Differentialrechnung häufig angewandten und aus derselben hinreichend bekannten Princip die Grösse  $i$  so bestimmen, dass der entsprechende Werth des ersten Differentialquotienten von  $\Theta$  in Bezug auf die unabhängige Variable  $i$  verschwindet, d. h. dass

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i} = 0$$

wird, weil dann nach dem Obigen die Veränderung  $\Delta \Theta$  von  $\Theta$  die Form

$$\Delta \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} \cdot \frac{\Delta i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 \Theta}{\partial i^3} \cdot \frac{\Delta i^3}{1.2.3}$$

$$+ \frac{\partial^4 \Theta}{\partial i^4} \cdot \frac{\Delta i^4}{1.2.3.4}$$

u. s. w.

$$+ \frac{\partial^{k-1} \Theta}{\partial i^{k-1}} \cdot \frac{\Delta i^{k-1}}{1 \dots (k-1)}$$

$$+ F^{(k)} (i + \varrho \Delta i) \cdot \frac{\Delta i^k}{1 \dots k}$$

annimmt, und also bloss Glieder enthält, welche in Bezug auf die der Null unendlich nahe kommende Grösse  $\Delta i$  von der zweiten oder einer höheren, überhaupt von einer die erste übersteigenden Ordnung sind.

Wenden wir dies nun aber auf den im vorhergehenden Para-



graphen ausführlich betrachteten Fall an, so ist klar, dass, wenn wir den Einfallswinkel  $i$  der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i} = 0$$

gemäss bestimmen, und uns dann den im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Kreis von einem nach einer gewissen Richtung hin sich bewegenden Strahle in dem Punkte seiner Peripherie getroffen denken, welchem der mittelst der vorhergehenden Bedingungsgleichung bestimmte Einfallswinkel entspricht, die allen parallel mit diesem Strahle unendlich nahe bei dem in Rede stehenden Punkte einfallenden Strahle entsprechenden ausfahrenden Strahlen auch wenigstens mit sehr, oder eigentlich mit möglichst grosser Annäherung einander parallel sein werden, eben weil die einfallenden Strahlen unter einander parallel angenommen werden, und weil der von den einfallenden und ausfahrenden Strahlen eingeschlossene Winkel bei der im Vorhergehenden zum Grunde gelegten Bestimmung des Einfallswinkels für der Null unendlich nahe kommende Aenderungen dieses Winkels die, absolut genommen, so viel als möglich kleinste Aenderung erleidet.

Werden parallel und sehr nahe bei einander einfallende Strahlen nach den an dem Kreise erlittenen Ablenkungen bei ihrem Austritte aus demselben nach allen möglichen Richtungen hin zerstreut, so werden natürlich die ausfahrenden Strahlen keinen besonders merklich hervortretenden Eindruck auf ein dieselben auffangendes Auge hervorzubringen im Stande sein. Das Entgegengesetzte findet aber offenbar Statt, wenn die parallel und sehr nahe bei einander einfallenden Strahlen nach den an dem Kreise erlittenen Ablenkungen auch bei ihrem Austritte aus demselben wenigstens nahe einander parallel bleiben. Deshalb pflegt man Strahlen von der letzteren Beschaffenheit, deren Bestimmungsmethode sich aus dem Vorhergehenden von selbst ergibt, wirksame Strahlen zu nennen, eine Benennung, welche wir ihrer Zweckmässigkeit wegen auch im Folgenden stets beibehalten wollen.

## §. 6.

Behufs der für das Folgende sehr wichtigen Ermittlung der wirksamen Strahlen müssen wir uns nun zunächst mit der Auflösung der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i} = 0$$



beschäftigen, zu welchem Ende zuerst die allgemeine Entwicklung des Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Theta}{\partial i}$$

erforderlich ist.

Nach 4) ist allgemein

$$\Theta - (n+1)(\pi - 2i_1) + G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) \cdot 2\pi = 2(i - \pi),$$

also, wenn  $i$  die Veränderung  $\Delta i$  erleidet, und die dadurch herbeigeführten Veränderungen von  $i_1$  und  $\Theta$  durch  $\Delta i_1$  und  $\Delta \Theta$  bezeichnet werden:

$$\left. \begin{aligned} \Theta + \Delta \Theta - (n+1)(\pi - 2(i_1 + \Delta i_1)) \\ + G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2(i_1 + \Delta i_1))}{2\pi}\right) \cdot 2\pi \end{aligned} \right\} = 2(i + \Delta i - \pi).$$

Weil nun, wie aus der im Obigen festgestellten Bedeutung der Symbole

$$G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) \text{ und } G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2(i_1 + \Delta i_1))}{2\pi}\right)$$

auf der Stelle ganz von selbst hervorgeht, für der Null unendlich nahe kommende Werthe von  $\Delta i$  jedenfalls

$$G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) = G\left(\frac{(n+1)(\pi - 2(i_1 + \Delta i_1))}{2\pi}\right)$$

ist; so folgt aus den beiden obigen Gleichungen durch Subtraction der ersten von der zweiten für der Null unendlich nahe kommende Werthe von  $\Delta i$  sogleich die Gleichung

$$\Delta \Theta + 2(n+1) \Delta i_1 = 2 \Delta i,$$

also

$$\frac{\Delta \Theta}{\Delta i} = 2 \left\{ 1 - (n+1) \frac{\Delta i_1}{\Delta i} \right\},$$

und folglich, wenn man sich  $\Delta i$  der Null nähern lässt, und auf beiden Seiten dieser Gleichung zu den Gränzen übergeht:

$$6) \frac{\partial \Theta}{\partial i} = 2 \left\{ 1 - (n+1) \frac{\partial i_1}{\partial i} \right\},$$

woraus sich durch fernere Differentiation sehr leicht die für jedes positive ganze, die Einheit übersteigende,  $k$  geltende Gleichung



$$7) \frac{\partial^k \Theta}{\partial i^k} = - 2 (n + 1) \frac{\partial^k i_1}{\partial i^k}$$

ergiebt.

Weil nun nach 5)

$$\sin i_1 = \mu \sin i$$

ist, so ist

$$\frac{\partial \sin i_1}{\partial i} = \frac{\partial \sin i_1}{\partial i_1} \cdot \frac{\partial i_1}{\partial i} = \mu \frac{\partial \sin i}{\partial i},$$

d. i. nach den Principien der Differentialrechnung

$$\cos i_1 \frac{\partial i_1}{\partial i} = \mu \cos i,$$

also

$$8) \frac{\partial i_1}{\partial i} = \mu \frac{\cos i}{\cos i_1},$$

und folglich nach 6)

$$9) \frac{\partial \Theta}{\partial i} = 2 \left\{ 1 - (n + 1) \mu \frac{\cos i}{\cos i_1} \right\},$$

wo immer  $i_1$  mittelst der Gleichung

$$\sin i_1 = \mu \sin i$$

zu bestimmen ist.

Um noch den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2},$$

welchen wir nachher auch gebrauchen werden, zu entwickeln, müssen wir nach Anleitung der Gleichung 7) zuvörderst den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2}$$

entwickeln. Nach der Gleichung 8) ist aber

$$\frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2} = \mu \frac{\cos i_1 \frac{\partial \cos i}{\partial i} - \cos i \frac{\partial \cos i_1}{\partial i}}{\cos i_1^2},$$

d. i.

$$\frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2} = \mu \frac{-\sin i \cos i_1 - \cos i \frac{\partial \cos i_1}{\partial i_1} \cdot \frac{\partial i_1}{\partial i}}{\cos i_1^2},$$



also

$$\frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2} = -\mu \frac{\sin i \cos i_1 - \cos i \sin i_1 \frac{\partial i_1}{\partial i}}{\cos i_1^2},$$

und folglich nach 8)

$$10) \frac{\partial^2 i_1}{\partial i^2} = -\mu \frac{\sin i \cos i_1 - \mu \cos i^2 \operatorname{tang} i_1}{\cos i_1^2},$$

also nach 7)

$$11) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i \cos i_1 - \mu \cos i^2 \operatorname{tang} i_1}{\cos i_1^2},$$

oder auch

$$12) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i \cos i_1^2 - \mu \cos i^2 \sin i_1}{\cos i_1^3},$$

oder auch, weil

$$\mu = \frac{\sin i_1}{\sin i}$$

ist:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i^2 \cos i_1^2 - \cos i^2 \sin i_1^2}{\sin i \cos i_1^3},$$

d. i., wie hieraus leicht folgt:

$$13) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin(i+i_1)\sin(i-i_1)}{\sin i \cos i_1^3}.$$

Endlich findet man auch leicht aus 12):

$$14) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \sin i \frac{\cos i_1^2 - \mu^2 \cos i^2}{\cos i_1^3},$$

oder

$$15) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n+1)\mu \frac{\sin i}{\cos i_1} \left\{ 1 - \mu^2 \left( \frac{\cos i}{\cos i_1} \right)^2 \right\}.$$

Bei der Entwicklung der höheren Differentialquotienten von  $\Theta$  in Bezug auf die veränderliche Grösse  $i$  im Allgemeinen wollen wir jetzt nicht verweilen, da wir derselben bei unserer folgenden Untersuchung nicht bedürfen.

Zur Bestimmung der wirksamen Strahlen erhält man nun aus 9) unmittelbar die Gleichung



$$1 - (n + 1) \mu \frac{\cos i}{\cos i_1} = 0,$$

mit welcher man noch die bekannte Grundgleichung

$$\sin i_1 = \mu \sin i$$

verbinden muss, so dass man also jetzt zwischen den beiden positiven spitzen Winkeln  $i$  und  $i_1$  die beiden Gleichungen

$$16) \quad \begin{cases} \sin i_1 = \mu \sin i, \\ \cos i_1 = (n + 1) \mu \cos i \end{cases}$$

hat, mittelst welcher sich diese beiden Winkel bestimmen lassen.

Um den Winkel  $i_1$  aus diesen beiden Gleichungen zu eliminiren, quadriere man dieselben und addire sie dann zu einander, so ergiebt sich auf der Stelle

$$\begin{aligned} 1 &= \mu^2 \sin^2 i + (n + 1)^2 \mu^2 \cos^2 i \\ &= (n + 1)^2 \mu^2 - \{ (n + 1)^2 - 1 \} \mu^2 \sin^2 i \\ &= \mu^2 + \{ (n + 1)^2 - 1 \} \mu^2 \cos^2 i, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} n(n + 2) \mu^2 \sin^2 i &= (n + 1)^2 \mu^2 - 1, \\ n(n + 2) \mu^2 \cos^2 i &= 1 - \mu^2; \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} n(n + 2) \mu^2 \sin^2 i &= \{ (n + 1) \mu - 1 \} \{ (n + 1) \mu + 1 \}, \\ n(n + 2) \mu^2 \cos^2 i &= (1 - \mu)(1 + \mu); \end{aligned}$$

woraus, da  $\sin i$  und  $\cos i$  stets positive Grössen sind, sogleich

$$17) \quad \begin{cases} \sin i = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{(n + 1)^2 \mu^2 - 1}{n(n + 2)}}, \\ \cos i = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{n(n + 2)}}; \end{cases}$$

oder

$$18) \quad \begin{cases} \sin i = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\{ (n + 1) \mu - 1 \} \{ (n + 1) \mu + 1 \}}{n(n + 2)}}, \\ \cos i = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{(1 - \mu)(1 + \mu)}{n(n + 2)}} \end{cases}$$

folgt.

Verbindet man diese Gleichungen mit den Gleichungen 16), so erhält man



$$19) \quad \begin{cases} \sin i_1 = \sqrt{\frac{(n+1)^2 \mu^2 - 1}{n(n+2)}}, \\ \cos i_1 = (n+1) \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{n(n+2)}} \end{cases}$$

oder

$$20) \quad \begin{cases} \sin i_1 = \sqrt{\frac{\{(n+1)\mu - 1\} \{(n+1)\mu + 1\}}{n(n+2)}}, \\ \cos i_1 = (n+1) \sqrt{\frac{(1-\mu)(1+\mu)}{n(n+2)}} \end{cases}$$

Aus diesen Formeln erhellet auch auf der Stelle, dass die Möglichkeit unsers Problems dadurch bedingt wird, dass  $\mu$  eine Mittelgrösse zwischen

$$\frac{1}{n+1} \text{ und } 1,$$

d. h. in einer bekannten Bezeichnung, dass

$$\mu = M \left( \frac{1}{n+1}, 1 \right)$$

ist.

Man kann die Winkel  $i$  und  $i_1$  noch auf eine andere bemerkenswerthe Art berechnen. Aus den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \sin i_1 = \mu \sin i, \\ \cos i_1 = (n+1) \mu \cos i \end{cases}$$

folgt nämlich leicht

$$\begin{aligned} \sin i \pm \sin i_1 &= (1 \pm \mu) \sin i, \\ \cos i \pm \cos i_1 &= \{1 \pm (n+1)\mu\} \cos i; \end{aligned}$$

also nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\begin{aligned} 2 \sin^{1/2}(i+i_1) \cos^{1/2}(i-i_1) &= (1+\mu) \sin i, \\ 2 \cos^{1/2}(i+i_1) \sin^{1/2}(i-i_1) &= (1-\mu) \sin i \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2 \cos^{1/2}(i+i_1) \cos^{1/2}(i-i_1) &= \{1 + (n+1)\mu\} \cos i, \\ 2 \sin^{1/2}(i+i_1) \sin^{1/2}(i-i_1) &= \{1 - (n+1)\mu\} \cos i. \end{aligned}$$

Daher ist



$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1) \cot \frac{1}{2} (i - i_1) = \frac{1 + \mu}{1 - \mu},$$

$$- \cot \frac{1}{2} (i + i_1) \cot \frac{1}{2} (i - i_1) = \frac{1 + (n+1)\mu}{1 - (n+1)\mu};$$

und hieraus durch Division und Multiplication:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1)^2 = - \frac{(1 + \mu) \{ 1 - (n+1)\mu \}}{(1 - \mu) \{ 1 + (n+1)\mu \}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1)^2 = - \frac{(1 - \mu) \{ 1 - (n+1)\mu \}}{(1 + \mu) \{ 1 + (n+1)\mu \}};$$

oder

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1)^2 = \frac{(1 + \mu) \{ (n+1)\mu - 1 \}}{(1 - \mu) \{ (n+1)\mu + 1 \}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1)^2 = \frac{(1 - \mu) \{ (n+1)\mu - 1 \}}{(1 + \mu) \{ (n+1)\mu + 1 \}}.$$

Weil  $i$  und  $i_1$  positive spitze Winkel sind, so ist offenbar auch  $\frac{1}{2} (i + i_1)$  ein positiver spitzer Winkel, und daher  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1)$  positiv. Weil ferner nach dem Obigen, wenn das Problem überhaupt möglich sein soll, was vorher jederzeit besonders zu untersuchen ist,  $\mu < 1$  sein muss, und bekanntlich

$$\sin i_1 = \mu \sin i$$

ist, so ist  $i_1 < i$ , und folglich auch  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1)$  positiv. Daher ist nach dem Vorhergehenden

$$21) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1) = \sqrt{\frac{(1 + \mu) \{ (n+1)\mu - 1 \}}{(1 - \mu) \{ (n+1)\mu + 1 \}}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1) = \sqrt{\frac{(1 - \mu) \{ (n+1)\mu - 1 \}}{(1 + \mu) \{ (n+1)\mu + 1 \}}}; \end{cases}$$

oder, wenn man

$$22) \quad K = \sqrt{\frac{(n+1)\mu - 1}{(n+1)\mu + 1}}$$

setzt:

$$23) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1) = K \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}}, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1) = K \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 + \mu}}. \end{cases}$$



Hat man mittelst dieser Formeln  $\frac{1}{2}(i + i_1)$  und  $\frac{1}{2}(i - i_1)$  berechnet, wobei man nicht zu übersehen hat, dass diese Winkel beide positiv und spitz sind; so findet man  $i$  und  $i_1$  mittelst der Formeln

$$24) \quad \begin{cases} i = \frac{1}{2}(i + i_1) + \frac{1}{2}(i - i_1), \\ i_1 = \frac{1}{2}(i + i_1) - \frac{1}{2}(i - i_1). \end{cases}$$

Hat man aber  $i$  und  $i_1$ , so findet man den entsprechenden Werth von  $\Theta$  mittelst der aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden allgemeinen Formel

$$25) \quad \Theta = 2(i - \pi) + (n + 1)(\pi - 2i_1) - G \left( \frac{(n + 1)(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) \cdot 2\pi.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$\sin i_1 = \mu \sin i, \quad \cos i_1 = (n + 1) \mu \cos i$$

folgt

$$26) \quad \tan i_1 = \frac{1}{n + 1} \tan i, \quad \tan i = (n + 1) \tan i_1.$$

Führt man nun die vorhergehenden Ausdrücke von  $\cos i_1$  und  $\tan i_1$  in den aus dem Obigen bekannten Ausdruck des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial i^2} = 2(n + 1) \mu \frac{\sin i \cos i_1 - \mu \cos i^2 \tan i_1}{\cos i_1^2}$$

ein, so erhält man nach leichter Rechnung als entsprechenden Werth dieses zweiten Differentialquotienten die Grösse

$$\frac{2n(n + 2)}{(n + 1)^2} \tan i,$$

und da dieser Werth des zweiten Differentialquotienten offenbar eine positive Grösse ist, so folgt aus der allgemeinen Theorie der Maxima und Minima, welche hier aus der Differentialrechnung als bekannt vorausgesetzt wird, das bemerkenswerthe Resultat, dass für die wirksamen Strahlen der entsprechende Werth des Winkels  $\Theta$  ein Minimum ist, indem nämlich nach dem Vorhergehenden die aus der Differentialrechnung bekannten Bedingungen eines Minimums im vorliegenden Falle vollständig erfüllt sind.

Für den Uebergang eines Strahls aus Luft in Wasser kann man

$$\mu = 0,749$$

setzen.



Wenn also in diesem Falle  $n = 1$  ist, so ist nach 21)

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i + i_1) = \sqrt{\frac{1,749 \cdot 0,498}{0,251 \cdot 2,498}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i - i_1) = \sqrt{\frac{0,251 \cdot 0,498}{1,749 \cdot 2,498}}.$$

Ist dagegen  $n = 2$ , so ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i + i_1) = \sqrt{\frac{1,749 \cdot 1,247}{0,251 \cdot 3,247}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i - i_1) = \sqrt{\frac{0,251 \cdot 1,247}{1,749 \cdot 3,247}}.$$

Für  $n = 3$  ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i + i_1) = \sqrt{\frac{1,749 \cdot 1,996}{0,251 \cdot 3,996}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i - i_1) = \sqrt{\frac{0,251 \cdot 1,996}{1,749 \cdot 3,996}}.$$

Für  $n = 4$  endlich ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i + i_1) = \sqrt{\frac{1,749 \cdot 2,745}{0,251 \cdot 4,745}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(i - i_1) = \sqrt{\frac{0,251 \cdot 2,745}{1,749 \cdot 4,745}}.$$

Die Rechnung nach diesen Formeln führt man am besten auf folgende Art, wobei wir jedoch  $i$  und  $i_1$  nur bis auf Minuten genau angeben wollen.

Für  $n = 1$ :

$$\log 1,749 = 0,2427898$$

$$\log 0,251 = 0,3996737 - 1$$

$$\log 0,498 = 0,6972293 - 1$$

$$\log 2,498 = 0,3975924$$

$$0,2427898$$

$$0,3996737 - 1$$

$$0,6972293 - 1$$

$$0,3996737 - 1$$

$$0,2427898$$

$$0,3975924$$

$$0,8431161$$

$$0,1568839 - 1$$

$$0,2996369 - 1$$



$$\begin{array}{rcl}
 0,8431161 & & 0,1568839 - 1 \\
 0,2996369 - 1 & & 0,2996369 - 1 \\
 \hline
 0,1427530 & & 0,4565208 - 2 \\
 2) \hline
 0,0713765 & & 2) \hline
 0,2282604 - 1
 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1) = 10,0713765 - 10$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1) = 9,2282604 - 10$$

$$\frac{1}{2} (i + i_1) = 49^\circ . 41'$$

$$\frac{1}{2} (i - i_1) = 9 . 36$$

$$i = 59^\circ . 17'$$

$$i_1 = 40^\circ . 5'$$

Für  $n = 2$ :

$$\log 1,749 = 0,2427898$$

$$\log 0,251 = 0,3996737 - 1$$

$$\log 1,247 = 0,0958665$$

$$\log 3,247 = 0,5114823$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,2427898 & 0,3996737 - 1 & 0,0958665 \\
 0,3996737 - 1 & 0,2427898 & 0,5114823 \\
 \hline
 0,8431161 & 0,1568839 - 1 & 0,5843842 - 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,8431161 & & 0,1568839 - 1 \\
 0,5843842 - 1 & & 0,5843842 - 1 \\
 \hline
 0,4275003 & & 0,7412681 - 2 \\
 2) \hline
 0,2137502 & & 2) \hline
 0,3706342 - 1
 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1) = 10,2137502 - 10$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1) = 9,3706342 - 10$$

$$\frac{1}{2} (i + i_1) = 58^\circ . 33'$$

$$\frac{1}{2} (i - i_1) = 13 . 12$$

$$i = 71^\circ . 45'$$

$$i_1 = 45^\circ . 21'$$

Für  $n = 3$ :

$$\log 1,749 = 0,2427898$$

$$\log 0,251 = 0,3996737 - 1$$

$$\log 1,996 = 0,3001605$$

$$\log 3,996 = 0,6016255$$



|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 0,2427898     | 0,3996737 — 1 | 0,3001605     |
| 0,3996737 — 1 | 0,2427898     | 0,6016255     |
| 0,8431161     | 0,1568839 — 1 | 0,6985350 — 1 |

|                     |                         |
|---------------------|-------------------------|
| 0,8431161           | 0,1568839 — 1           |
| 0,6985350 — 1       | 0,6985350 — 1           |
| 0,5416511           | 0,8554189 — 2           |
| 2) <u>0,2708256</u> | 2) <u>0,4277095 — 1</u> |

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1) = 10,2708256 - 10$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1) = 9,4277095 - 10$$

$$\frac{1}{2} (i + i_1) = 61^\circ. 48'$$

$$\frac{1}{2} (i - i_1) = 14. 59$$

$$i = 76^\circ. 47'$$

$$i_1 = 46^\circ. 49'$$

Für  $n = 4$ :

$$\log 1,749 = 0,2427898$$

$$\log 0,251 = 0,3996737 - 1$$

$$\log 2,745 = 0,4385423$$

$$\log 4,745 = 0,6762362$$

|               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| 0,2427898     | 0,3996737 — 1 | 0,4385423     |
| 0,3996737 — 1 | 0,2427898     | 0,6762362     |
| 0,8431161     | 0,1568839 — 1 | 0,7623061 — 1 |

|                     |                         |
|---------------------|-------------------------|
| 0,8431161           | 0,1568839 — 1           |
| 0,7623061 — 1       | 0,7623061 — 1           |
| 0,6054222           | 0,9191900 — 2           |
| 2) <u>0,3027111</u> | 2) <u>0,4595950 — 1</u> |

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i + i_1) = 10,3027111 - 10$$

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (i - i_1) = 9,4595950 - 10$$

$$\frac{1}{2} (i + i_1) = 63^\circ. 31'$$

$$\frac{1}{2} (i - i_1) = 16. 4$$

$$i = 79^\circ. 35'$$

$$i_1 = 47^\circ. 27'$$

Nach 25) ist nun für  $n = 1$ :



$$\Theta = 2(i - \pi) + 2(\pi - 2i_1) - G \left( \frac{2(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) \cdot 2\pi.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber in diesem Falle:

$$\begin{aligned} i_1 &= 2405' \\ 2i_1 &= 4810 \\ \pi - 2i_1 &= 5990 \\ 2(\pi - 2i_1) &= 11980 \\ \frac{2(\pi - 2i_1)}{2\pi} &= \frac{11980}{21600} \end{aligned}$$

$$G \left( \frac{2(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) = 0$$

also nach dem Obigen

$$27) \frac{1}{2} \Theta = i - 2i_1$$

oder in Zahlen

$$27^*) \Theta = -41^\circ.46'.$$

Woher hier das negative Zeichen kommt, wird man sich nach den im Obigen gemachten Voraussetzungen und gegebenen Bestimmungen leicht erklären können.

Nach 25) ist für  $n = 2$ :

$$\Theta = 2(i - \pi) + 3(\pi - 2i_1) - G \left( \frac{3(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) \cdot 2\pi.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber in diesem Falle:

$$\begin{aligned} i_1 &= 2721' \\ 2i_1 &= 5442 \\ \pi - 2i_1 &= 5358 \\ 3(\pi - 2i_1) &= 16074 \\ \frac{3(\pi - 2i_1)}{2\pi} &= \frac{16074}{21600} \end{aligned}$$

$$G \left( \frac{3(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) = 0$$

also nach dem Obigen

$$28) \frac{1}{2} \Theta = \frac{1}{2} \pi + i - 3i_1$$

oder in Zahlen

$$28^*) \Theta = 51^\circ.24'.$$

Nach 25) ist für  $n = 3$ :

$$\Theta = 2(i - \pi) + 4(\pi - 2i_1) - G \left( \frac{4(\pi - 2i_1)}{2\pi} \right) \cdot 2\pi.$$



Nach dem Vorhergehenden ist aber in diesem Falle:

$$i_1 = 2809'$$

$$2i_1 = 5618$$

$$\pi - 2i_1 = 5182$$

$$4(\pi - 2i_1) = 20728$$

$$\frac{4(\pi - 2i_1)}{2\pi} = \frac{20728}{21600}$$

$$G\left(\frac{4(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) = 0$$

also nach dem Obigen

$$29) \quad \frac{1}{2} \Theta = \pi + i - 4i_1$$

oder in Zahlen

$$29^*) \quad \Theta = 139^\circ. 12'.$$

Nach 25) ist für  $n = 4$ .

$$\Theta = 2(i - \pi) + 5(\pi - 2i_1) - G\left(\frac{5(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) \cdot 2\pi.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber in diesem Falle:

$$i_1 = 2847'$$

$$2i_1 = 5694$$

$$\pi - 2i_1 = 5106$$

$$5(\pi - 2i_1) = 25530$$

$$\frac{5(\pi - 2i_1)}{2\pi} = \frac{25530}{21600}$$

$$G\left(\frac{5(\pi - 2i_1)}{2\pi}\right) = 1$$

also nach dem Obigen

$$30) \quad \frac{1}{2} \Theta = \frac{1}{2} \pi + i - 5i_1,$$

oder in Zahlen

$$30^*) \quad \Theta = - 135^\circ. 20'.$$

§. 7.

Umgekehrt kann man nun aber auch, wenn für die wirksamen Strahlen der Winkel  $\Theta$  gegeben ist, aus demselben die Winkel  $i$  und  $i_1$ , und folglich auch die Grösse  $\mu$  finden, wie wir jetzt zuvörderst für  $n = 1$  zeigen wollen, indem wir immer den Fall in's Auge fassen, wenn die beiden Körper, zwischen denen die Brechung Statt findet, Luft und Wasser sind.



Nach 26) und 27) hat man nämlich die beiden folgenden Gleichungen:

$$\operatorname{tang} i = 2 \operatorname{tang} i_1, \quad \frac{1}{2} \Theta = i - 2i_1.$$

Also ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta = \frac{\operatorname{tang} i - \operatorname{tang} 2i_1}{1 + \operatorname{tang} i \operatorname{tang} 2i_1},$$

und weil nun

$$\operatorname{tang} 2i_1 = \frac{2 \operatorname{tang} i_1}{1 - \operatorname{tang} i_1^2}$$

$$\text{und } \operatorname{tang} i_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tang} i \text{ ist,}$$

so ist

$$\operatorname{tang} 2i_1 = \frac{\operatorname{tang} i}{1 - \frac{1}{4} \operatorname{tang} i^2},$$

also, wenn man dies in den obigen Ausdruck von  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta$  einführt:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta = - \frac{\frac{1}{4} \operatorname{tang} i^3}{1 + \frac{3}{4} \operatorname{tang} i^2},$$

woraus sich ferner leicht zur Bestimmung von  $i$  die Gleichung

$$31) \operatorname{tang} i^3 + 3 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta \operatorname{tang} i^2 + 4 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta = 0$$

ergiebt. Weil aber bekanntlich

$$\operatorname{tang} i = 2 \operatorname{tang} i_1$$

ist, so erhält man leicht auch die Gleichung

$$32) \operatorname{tang} i_1^3 + \frac{3}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta \operatorname{tang} i_1^2 + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta = 0.$$

Ferner ergeben sich aus den beiden vorhergehenden Gleichungen auch sehr leicht die beiden folgenden Gleichungen:

$$33) \cot i^3 + \frac{3}{4} \cot i + \frac{1}{4} \cot \frac{1}{2} \Theta = 0$$

und

$$34) \cot i_1^3 + 3 \cot i_1 + 2 \cot \frac{1}{2} \Theta = 0,$$

welche den wichtigen Vortheil darbieten, dass in ihnen schon das zweite Glied fehlt, und also nicht erst weggeschafft zu werden braucht.

Um die Gleichung 34) aufzulösen, setzen wir der Kürze wegen

$$\cot \frac{1}{2} \Theta = -a, \quad \cot i_1 = x;$$

so wird die in Rede stehende Gleichung

$$x^3 + 3x - 2a = 0.$$



Da nach 27\*) offenbar  $\cot \frac{1}{2} \Theta$  eine negative Grösse ist, so ist die Grösse  $a$  positiv, und die Function

$$x^3 + 3x - 2a$$

enthält also nur einen Wechsel. Folglich hat die Gleichung

$$x^3 + 3x - 2a = 0$$

nicht mehr als eine positive Wurzel. Da ferner die aus der Function

$$x^3 + 3x - 2a$$

auf bekannte Weise abgeleitete Function

$$x^3 + 3x + 2a$$

gar keinen Wechsel enthält, so hat die Gleichung

$$x^3 + 3x - 2a = 0$$

keine negative Wurzel, und diese Gleichung eines ungeraden Grades hat also nur eine reelle, und zwar positive Wurzel, welche der gesuchte Werth von

$$x = \cot i_1$$

ist.

Wendet man aber auf die Gleichung

$$x^3 + 3x - 2a = 0$$

die Cardanische Formel an, so erhält man nach einigen ganz leichten Transformationen

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{1 + a^2}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{1 + a^2}}.$$

Nun ist aber

$$1 + a^2 = 1 + \cot^2 \frac{1}{2} \Theta = \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} \Theta,$$

also, weil nach 27\*) offenbar  $\operatorname{cosec} \frac{1}{2} \Theta$  negativ ist,

$$\sqrt{1 + a^2} = -\operatorname{cosec} \frac{1}{2} \Theta,$$

und folglich

$$a + \sqrt{1 + a^2} = -\cot \frac{1}{2} \Theta - \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \Theta = -\frac{1 + \cos \frac{1}{2} \Theta}{\sin \frac{1}{2} \Theta},$$

$$a - \sqrt{1 + a^2} = -\cot \frac{1}{2} \Theta + \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \Theta = \frac{1 - \cos \frac{1}{2} \Theta}{\sin \frac{1}{2} \Theta};$$

oder

$$a + \sqrt{1 + a^2} = -\frac{2 \cos^2 \frac{1}{4} \Theta}{2 \sin \frac{1}{4} \Theta \cos \frac{1}{4} \Theta} = -\cot \frac{1}{4} \Theta,$$

$$a - \sqrt{1 + a^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{4} \Theta}{2 \sin \frac{1}{4} \Theta \cos \frac{1}{4} \Theta} = \tan \frac{1}{4} \Theta.$$



Daher ist

$$x = \cot i_1 = \sqrt[3]{-\cot^{1/4} \Theta} + \sqrt[3]{\tan^{1/4} \Theta},$$

oder

$$35) \cot i_1 = \sqrt[3]{-\cot^{1/4} \Theta} - \sqrt[3]{\tan^{1/4} \Theta},$$

oder auch

$$36) \cot i_1 = \sqrt[3]{\tan^{1/4} \Theta} - \sqrt[3]{\cot^{1/4} \Theta},$$

wo nun aber die Grössen unter den Wurzelzeichen negativ sind.

Hat man auf diese Weise  $i_1$  gefunden, so ergibt sich  $i$  mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$37) \tan i = 2 \tan i_1,$$

und  $\mu$  erhält man dann mittelst eines der beiden folgenden ebenfalls aus dem Obigen bekannten Ausdrücke:

$$38) \mu = \frac{\sin i_1}{\sin i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos i_1}{\cos i}.$$

## §. 8.

Für  $n = 2$  haben wir nach 26) und 28) die beiden folgenden Gleichungen:

$$\tan i = 3 \tan i_1, \quad \frac{1}{2} \Theta = \frac{1}{2} \pi + i - 3 i_1.$$

Also ist

$$\cot \frac{1}{2} \Theta = - \tan (i - 3 i_1) = - \frac{\tan i - \tan 3 i_1}{1 + \tan i \tan 3 i_1}.$$

Weil aber bekanntlich

$$\tan 3 i_1 = \frac{3 \tan i_1 - \tan^3 i_1}{1 - 3 \tan^2 i_1},$$

und nach dem Vorhergehenden

$$\tan i_1 = \frac{1}{3} \tan i$$

ist, so ist

$$\tan 3 i_1 = \frac{27 \tan i - \tan^3 i}{27 - 9 \tan^2 i},$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$\cot \frac{1}{2} \Theta = \frac{8 \tan^3 i}{27 + 18 \tan^2 i - \tan^4 i},$$

woraus sich ferner leicht die Gleichung

$$39) \tan^4 i + 8 \tan \frac{1}{2} \Theta \tan^3 i - 18 \tan^2 i - 27 = 0,$$

oder die Gleichung



40)  $\tan i_1^4 + \frac{8}{3} \tan \frac{1}{2} \Theta \tan i_1^3 - 2 \tan i_1^2 - \frac{1}{3} = 0$   
ergiebt. Diese beiden Gleichungen kann man aber auch auf die folgende Form bringen:

$$41) \cot i^4 + \frac{2}{3} \cot i^2 - \frac{8}{27} \tan \frac{1}{2} \Theta \cot i - \frac{1}{27} = 0$$

und

$$42) \cot i_1^4 + 6 \cot i_1^2 - 8 \tan \frac{1}{2} \Theta \cot i_1 - 3 = 0.$$

Um die letzte Gleichung aufzulösen, setze man der Kürze wegen

$$a = \tan \frac{1}{2} \Theta, \quad x = \cot i_1,$$

wo nach 28\*) die Grösse  $a$  positiv ist; so wird die in Rede stehende Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = 0.$$

Da die Function

$$x^2 + 6x^2 - 8ax - 3$$

nur einen Wechsel enthält, so kann die Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = 0$$

nicht mehr als eine positive Wurzel haben. Da ferner auch die aus der Function

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3$$

auf bekannte Weise abgeleitete Function

$$x^4 + 6x^2 + 8ax - 3$$

nur einen Wechsel enthält, so kann die Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = 0$$

auch nicht mehr als eine negative Wurzel haben. Weil aber das letzte Glied dieser Gleichung eines geraden Grades negativ ist, so hat dieselbe nach einem aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen bekannten Satze wirklich zwei reelle Wurzeln, von denen die eine positiv, die andere negativ ist, und ihre beiden andern Wurzeln sind nach dem Vorhergehenden imaginär. Die reelle positive Wurzel liefert den Werth der gesuchten Grösse  $x = \cot i_1$ , da nach dem Obigen bekanntlich diese Grösse nur positiv sein kann, weil  $i_1$  positiv und nicht grösser als  $\frac{1}{2} \pi$  ist.

Um nun die Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = 0$$

aufzulösen, setzen wir

$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r),$$

d. i.



$$x^4 + 6x^2 - 8ax - 3 = x^4 + (q + r - p^2)x^2 - p(q - r)x + qr,$$

woraus sich zur Bestimmung von  $p, q, r$  die Gleichungen

$$q + r - p^2 = 6,$$

$$p(q - r) = 8a,$$

$$qr = -3$$

ergeben. Aus den beiden Gleichungen

$$q + r = p^2 + 6,$$

$$q - r = \frac{8a}{p}$$

erhält man

$$2q = p^2 + \frac{8a}{p} + 6,$$

$$2r = p^2 - \frac{8a}{p} + 6;$$

folglich

$$4qr = (p^2 + 6)^2 - \frac{64a^2}{p^2} = p^4 + 12p^2 - \frac{64a^2}{p^2} + 36,$$

und daher wegen der dritten der obigen Gleichungen zwischen den Grössen  $p, q, r$ :

$$p^4 + 12p^2 - \frac{64a^2}{p^2} + 36 = -12,$$

$$p^6 + 12p^4 + 48p^2 - 64a^2 = 0.$$

Setzt man jetzt

$$p^2 = u - 4,$$

so ist

$$p^6 = u^3 - 12u^2 + 48u - 64,$$

$$12p^4 = 12u^2 - 96u + 192,$$

$$48p^2 = 48u - 192,$$

$$-64a^2 = -64a^2;$$

also

$$p^6 + 12p^4 + 48p^2 - 64a^2 = u^3 - 64(1 + a^2),$$

folglich

$$u^3 - 64(1 + a^2) = 0, \quad u^3 = 64(1 + a^2),$$

also



$$u = 4\sqrt[3]{1 + a^2}.$$

Folglich ist

$$p^2 = u - 4 = 4(\sqrt[3]{1 + a^2} - 1),$$

$$p^2 + 6 = u + 2 = 4\sqrt[3]{1 + a^2} + 2;$$

also nach dem Obigen

$$p = \pm 2\sqrt[3]{1 + a^2} - 1,$$

$$q = 2\sqrt[3]{1 + a^2} + 1 \pm \frac{2a}{\sqrt[3]{1 + a^2} - 1},$$

$$r = 2\sqrt[3]{1 + a^2} + 1 \mp \frac{2a}{\sqrt[3]{1 + a^2} - 1}.$$

Hat man mittelst dieser Formeln  $p, q, r$  gefunden, so erhält man die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung des vierten Grades durch Auflösung der beiden folgenden Gleichungen des zweiten Grades:

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x^2 - px + r = 0.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$p = \pm f, \quad q = g \pm h, \quad r = g \mp h$$

wo die Bedeutung der Symbole  $f, g, h$  aus dem Obigen ganz von selbst erhellen wird; so werden die beiden Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0$$

und

$$x^2 - px + r = 0$$

respective

$$x^2 \pm fx + g \pm h = 0$$

und

$$x^2 \mp fx + g \mp h = 0,$$

und liefern also offenbar bloss die beiden Gleichungen

$$x^2 + fx + g + h = 0$$

und

$$x^2 - fx + g - h = 0,$$

weshalb es augenscheinlich genügt, bloss



$$p = 2\sqrt[3]{1+a^2} - 1,$$

$$q = 2\sqrt[3]{1+a^2} + 1 + \frac{2a}{\sqrt[3]{1+a^2} - 1},$$

$$r = 2\sqrt[3]{1+a^2} + 1 - \frac{2a}{\sqrt[3]{1+a^2} - 1}$$

zu setzen, und dann die beiden Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0,$$

$$x^2 - px + r = 0$$

aufzulösen.

Löst man diese beiden Gleichungen wirklich auf, so erhält man

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q},$$

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - r}.$$

Aber nach dem Vorhergehenden

$$\frac{1}{4}p^2 - q = -\sqrt[3]{1+a^2} - 2 - \frac{2a}{\sqrt[3]{1+a^2} - 1},$$

$$\frac{1}{4}p^2 - r = -\sqrt[3]{1+a^2} - 2 + \frac{2a}{\sqrt[3]{1+a^2} - 1};$$

also

$$x = -\sqrt[3]{1+a^2} \pm \sqrt{-\sqrt[3]{1+a^2} - 2 - \frac{2a}{\sqrt[3]{1+a^2} - 1}},$$

$$x = \sqrt[3]{1+a^2} \pm \sqrt{-\sqrt[3]{1+a^2} - 2 + \frac{2a}{\sqrt[3]{1+a^2} - 1}};$$

wo die beiden ersten Wurzeln offenbar imaginär sind, und von den beiden letzten Wurzeln das obere Zeichen augenscheinlich die eine positive Wurzel liefert, welche nach dem Obigen die Gleichung nur haben kann, und die im vorliegenden Falle auch allein brauchbar ist.

Weil bekanntlich  $a = \tan \frac{1}{2} \Theta$  ist, so ist



$$\sqrt[3]{1+a^2} = \sec^{1/2} \Theta^{2/3},$$

und folglich

$$43) \begin{cases} x = -\sqrt[3]{\sec^{1/2} \Theta^{2/3} - 1} \pm \sqrt[3]{-2 - \sec^{1/2} \Theta^{2/3} - \frac{2 \tan^{1/2} \Theta}{\sqrt[3]{\sec^{1/2} \Theta^{2/3} - 1}}}, \\ x = \sqrt[3]{\sec^{1/2} \Theta^{2/3} - 1} \pm \sqrt[3]{-2 - \sec^{1/2} \Theta^{2/3} + \frac{2 \tan^{1/2} \Theta}{\sqrt[3]{\sec^{1/2} \Theta^{2/3} - 1}}}; \end{cases}$$

wodurch also völlig entwickelte Ausdrücke der vier Wurzeln unserer Gleichung des vierten Grades gefunden sind, und diese Gleichung daher jetzt vollständig aufgelöst ist, was wohl als ein besonders bemerkenswerthes Resultat der ganzen vorhergehenden Untersuchung betrachtet werden darf.

Setzt man

$$44) \sec U = \sec^{1/2} \Theta^{1/3},$$

wo  $U$  positiv und nicht grösser als  $1/2\pi$  sein soll, so ist

$$\sec^{1/2} \Theta^{2/3} - 1 = \sec U^2 - 1 = \tan^2 U,$$

und folglich

$$\sqrt[3]{\sec^{1/2} \Theta^{2/3} - 1} = \tan U;$$

also

$$45) \begin{cases} x = -\tan U \pm \sqrt[3]{-2 - \sec U^2 - 2 \tan^{1/2} \Theta \cot U}, \\ x = \tan U \pm \sqrt[3]{-2 - \sec U^2 + 2 \tan^{1/2} \Theta \cot U}; \end{cases}$$

oder

$$46) \begin{cases} x = -\tan U \pm \sqrt[3]{-\sec U^2 - \frac{2 \sin(1/2 \Theta + U)}{\cos^{1/2} \Theta \sin U}}, \\ x = \tan U \pm \sqrt[3]{-\sec U^2 + \frac{2 \sin(1/2 \Theta - U)}{\cos^{1/2} \Theta \sin U}}. \end{cases}$$

Für  $\cot i_1$  erhält man hieraus nach den oben gemachten Bemerkungen den folgenden Ausdruck:

$$47) \cot i_1 = \tan U + \sqrt[3]{-\sec U^2 + \frac{2 \sin(1/2 \Theta - U)}{\cos^{1/2} \Theta \sin U}}$$

oder

$$48) \cot i_1 = \tan U + \sec U \sqrt[3]{-1 + \frac{2 \sin(1/2 \Theta - U) \cos U}{\cos^{1/2} \Theta \tan U}}.$$



Berechnet man den Hülfswinkel  $V$  mittelst der Formel

$$49) \cos V = \sqrt{\frac{\cos^{1/2} \Theta \tan U}{2 \sin^{1/2} (\Theta - U) \cos U}},$$

und nimmt denselben positiv und nicht grösser als  $1/2\pi$ , so wird

$$\cot i_1 = \tan U + \sec U \sqrt{\sec^2 V - 1},$$

d. i.

$$50) \cot i_1 = \tan U + \sec U \tan V,$$

oder

$$51) \cot i_1 = \frac{\sin V + \sin U \cos V}{\cos U \cos V}.$$

Berechnet man nun noch den Hülfswinkel  $W$  mittelst der Formel

$$52) \sin W = \sin U \cos V,$$

so wäre, wie man leicht findet:

$$53) \cot i_1 = \frac{2 \sin^{1/2} (V + W) \cos^{1/2} (V - W)}{\cos U \cos V}.$$

Hat man aber  $i_1$ , so ergibt sich  $i$  mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$54) \tan i = 3 \tan i_1,$$

und  $\mu$  erhält man mittelst eines der beiden folgenden Ausdrücke:

$$55) \mu = \frac{\sin i_1}{\sin i} = 1/3 \cdot \frac{\cos i_1}{\cos i}.$$

Stellen wir die sämtlichen zur Berechnung von  $\mu$  aus  $\Theta$  erforderlichen Formeln nach dem Vorhergehenden in ihrer zur numerischen Rechnung bequemsten Form zusammen, so erhalten wir:

$$56) \left\{ \begin{array}{l} \cos U = \cos^{1/2} \Theta^{1/3}, \\ \cos V = \left\{ \frac{\cos^{1/2} \Theta \tan U}{2 \sin^{1/2} (\Theta - U) \cos U} \right\}^{1/2}, \\ \sin W = \sin U \cos V, \\ \cot i_1 = \frac{2 \sin^{1/2} (V + W) \cos^{1/2} (V - W)}{\cos U \cos V}, \\ \cot i = 1/3 \cot i_1, \\ \mu = \frac{\sin i_1}{\sin i} = 1/3 \cdot \frac{\cos i_1}{\cos i}. \end{array} \right.$$



§. 9.

In der Kürze wollen wir nun auch noch den Fall, wenn  $n=3$  ist, betrachten.

In diesem Falle hat man nach 26) und 29) die beiden Gleichungen

$$\operatorname{tang} i = 4 \operatorname{tang} i_1, \quad \frac{1}{2} \Theta = \pi + i - 4i_1.$$

Also ist

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta = \operatorname{tang} (i - 4i_1) = \frac{\operatorname{tang} i - \operatorname{tang} 4i_1}{1 + \operatorname{tang} i \operatorname{tang} 4i_1}.$$

Weil nun bekanntlich

$$\operatorname{tang} 4i_1 = \frac{4 \operatorname{tang} i_1 - 4 \operatorname{tang} i_1^3}{1 - 6 \operatorname{tang} i_1^2 + \operatorname{tang} i_1^4}$$

ist, so ist, wie man leicht findet,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta = \frac{-20 \operatorname{tang} i_1^3 - 4 \operatorname{tang} i_1^5}{1 + 10 \operatorname{tang} i_1^2 - 15 \operatorname{tang} i_1^4},$$

woraus sich ferner leicht die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} 57) \quad & \operatorname{tang} i_1^5 + \frac{15}{4} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta \operatorname{tang} i_1^4 \\ & - 5 \operatorname{tang} i_1^3 \\ & - \frac{5}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta \operatorname{tang} i_1^2 \\ & - \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta \end{aligned} \right\} = 0$$

oder die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} 58) \quad & \operatorname{tang} i^5 + 15 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta \operatorname{tang} i^4 \\ & - 80 \operatorname{tang} i^3 \\ & - 160 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta \operatorname{tang} i^2 \\ & - 256 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Theta \end{aligned} \right\} = 0$$

ergiebt. Man kann diese beiden Gleichungen aber auch leicht auf die folgende Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} 59) \quad & \cot i_1^5 + 10 \cot i_1^3 \\ & + 20 \cot \frac{1}{2} \Theta \cot i_1^2 \\ & - 15 \cot i_1 \\ & - 4 \cot \frac{1}{2} \Theta \end{aligned} \right\} = 0$$

oder



$$60) \cot i^5 + \frac{5}{8} \cot i^3 + \frac{5}{16} \cot^{1/2} \Theta \cot i^2 - \frac{15}{256} \cot i - \frac{1}{256} \cot^{1/2} \Theta = 0.$$

Nach 29 \*) sind  $\tan^{1/2} \Theta$  und  $\cot^{1/2} \Theta$  positive Grössen. Also sind die letzten Glieder der obigen Gleichungen negativ, und alle positiven Glieder folgen in denselben ohne Unterbrechung auf das erste Glied. Daher hat nach einem bekannten Satze der allgemeinen Theorie der Gleichungen jede der obigen Gleichungen eine, aber auch nur eine reelle positive Wurzel.

## §. 10.

Der bisher befolgten Methode der Entwicklung, die sich allerdings durch ihre Einfachheit und auch dadurch empfiehlt, dass sie im Ganzen nur ein geringes Maass mathematischer Kenntnisse in Anspruch nimmt, steht dessenungeachtet der nicht unwichtige Umstand entgegen, dass sie nur auf den speciellen Fall des Kreises anwendbar ist und überhaupt ihrem Wesen nach einer Erweiterung nicht fähig sein dürfte, so dass man also schon dann, wenn man statt des Kreises etwa die Ellipse in Betrachtung ziehen wollte, was für die Theorie des Regenbogens, wie wir späterhin sehen werden, aus einem besonderen Grunde von Wichtigkeit ist, zu einer andern Methode seine Zuflucht zu nehmen genöthigt sein würde. Wir wollen daher jetzt die vorige Untersuchung, indem wir uns bei derselben der von der neueren analytischen Geometrie in reichlichem Maasse dargebotenen Hilfsmittel bedienen, noch auf einem von dem bisher befolgten ganz verschiedenen Wege anstellen, und wollen zugleich statt eines Kreises die denselben als einen besondern Fall unter sich begreifende Ellipse setzen, wenigstens so weit dies, ohne uns in zu grosse Weitläufigkeiten verwickeln zu müssen, geschehen kann. Zuerst müssen wir aber noch die folgende bloss geometrische Betrachtung über die Normalen der Ellipse vorausschicken.

## §. 11.

Wenn wie gewöhnlich

$$61) \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

die Gleichung einer Ellipse ist, und durch  $X, Y$  die Coordinaten eines beliebigen bestimmten Punktes ( $XY$ ) in derselben bezeichnet



werden, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$62) \quad y - Y = -\frac{\partial X}{\partial Y} (x - X)$$

die Gleichung der diesem Punkte entsprechenden Normale der Ellipse. Aus der Gleichung 61) der Ellipse folgt durch Differentiation auf der Stelle

$$\frac{x}{a^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{y}{b^2} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{a^2 y}{b^2 x};$$

also

$$\frac{\partial X}{\partial Y} = -\frac{a^2 Y}{b^2 X},$$

und die Gleichung der dem Punkte  $(XY)$  der Ellipse entsprechenden Normale derselben ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$63) \quad y - Y = \frac{a^2 Y}{b^2 X} (x - X).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Normale mit der Axe der  $x$  durch  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ ; so ist  $\mathfrak{Y} = 0$ , und folglich nach 63)

$$Y = \frac{a^2 Y}{b^2 X} (\mathfrak{X} - X), \quad \mathfrak{X} - X = \frac{b^2}{a^2} X;$$

also

$$\mathfrak{X} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) X = \frac{a^2 - b^2}{a^2} X = \frac{e^2}{a^2} X,$$

wo  $e$  seine aus der Lehre von der Ellipse hinreichend bekannte Bedeutung hat.

Die Coordinaten des Punktes  $(XY)$  in Bezug auf ein durch den Punkt  $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$  als Anfang gelegtes, dem primitiven Systeme der  $xy$  paralleles Coordinatensystem sind nach den bekannten allgemeinen Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$X - \mathfrak{X} = \frac{b^2}{a^2} X, \quad Y - \mathfrak{Y} = Y.$$

Ist nun  $R$  die Entfernung des Punktes  $(XY)$  von dem Punkte  $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$ , und bezeichnet  $N$  den Winkel, welchen der von dem Punkte  $(XY)$  an nach dem äusseren Raume der Ellipse hin liegende Theil der diesem Punkte entsprechenden Normale der Ellipse mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt  $(XY)$  gelegten,



dem primitiven Systeme der  $xy$  parallelen Coordinatensystems einschliesst, indem man diesen Winkel von dem positiven Theile der in Rede stehenden Axe an durch den Coordinatenwinkel des entsprechenden Coordinatensystems hindurch von 0 bis  $360^\circ$  zählt; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$X - \mathfrak{X} = R \cos N, \quad Y - \mathfrak{Y} = R \sin N;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$R \cos N = \frac{b^2}{a^2} X, \quad R \sin N = Y;$$

also, weil bekanntlich

$$R = \sqrt{(X - \mathfrak{X})^2 + (Y - \mathfrak{Y})^2} = \frac{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}{a^2}$$

ist:

$$b^2 X = \cos N \sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}, \quad a^2 Y = \sin N \sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2};$$

folglich

$$64) \quad \cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}.$$

Bezieht sich der Winkel ( $N$ ) auf den von dem Punkte ( $XY$ ) an nach dem inneren Raume der Ellipse hin liegenden Theil der Normale derselben in diesem Punkte, und wird ganz auf ähnliche Art, wie vorher, der Winkel  $N$  genommen; so ist offenbar entweder

$$(N) = N + 180^\circ$$

oder

$$N = (N) + 180^\circ,$$

also überhaupt

$$(N) = N \pm 180^\circ,$$

und folglich allgemein

$$\cos(N) = -\cos N, \quad \sin(N) = -\sin N;$$

also nach dem Vorhergehenden

$$65) \quad \cos(N) = -\frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin(N) = -\frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}.$$

## §. 12.

Nach dieser vorläufigen, für das Folgende wichtigen Betrachtung über die Normalen der Ellipse wollen wir uns jetzt, auf ganz ähnliche Art wie früher bei dem Kreise, einen Strahl denken,



welcher, aus dem äusseren Raume der Ellipse herkommend, dieselbe in dem Punkte ( $XY$ ) trifft. Der  $180^\circ$  nicht übersteigende Winkel, welchen der von dem Punkte ( $XY$ ) an nach dem äusseren Raume der Ellipse, d. h. nach der Seite hin, von welcher der Strahl her kommt, also der Richtung der Bewegung des Strahls entgegen liegende Theil desselben mit dem von dem Punkte ( $XY$ ) an nach dem äusseren Raume der Ellipse hin liegenden Theile der diesem Punkte entsprechenden Normale derselben einschliesst, sei  $V$ . Durch den Punkt ( $XY$ ) denken wir uns ein dem primitiven Systeme der  $xy$  paralleles Coordinatensystem gelegt, und bezeichnen, unter der Voraussetzung, dass der Strahl in dem Punkte ( $XY$ ) an der Ellipse eine Brechung erleidet, die von dem als von dem Punkte ( $XY$ ) ausgehend gedachten einfallenden und gebrochenen Strahle mit dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden Coordinatensystems eingeschlossenen, von diesem Theile der ersten Axe an durch den Coordinatenwinkel des Systems hindurch von  $0$  bis  $360^\circ$  gezählten Winkel respective durch  $U$  und  $U'$ ; so ist, wie leicht erhellen wird, nach den in meinen Optischen Untersuchungen. Erster Theil. Leipzig. 1846. S. 34. Nr. 50. entwickelten allgemeinen optischen Grundformeln, wenn man nur die dort gebrauchten Zeichen nach den hier eingeführten Bezeichnungen gehörig modificirt, weil hier offenbar immer  $V < 90^\circ$  ist:

$$66) \begin{cases} \cos U' = -\mu \cos U + \cos N (\mu \cos V - \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 V}), \\ \sin U' = -\mu \sin U + \sin N (\mu \cos V - \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 V}); \end{cases}$$

wo  $\mu$  und  $N$  ihre schon aus dem Vorhergehenden bekannten Bedeutungen haben. Nun ist aber nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie allgemein

$$\cos V = \cos U \cos N + \sin U \sin N,$$

d. i. allgemein

$$\cos V = \cos (U - N),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\cos U' = -\mu \cos U + \cos N \{ \mu \cos (U - N) - \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 (U - N)} \},$$

$$\sin U' = -\mu \sin U + \sin N \{ \mu \cos (U - N) - \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 (U - N)} \};$$

also, weil

$$\begin{aligned} &= -\cos U + \cos N \cos (U - N) \\ &= -\cos U + \cos U \cos N^2 + \sin U \sin N \cos N \\ &= -\cos U \sin N^2 + \sin U \sin N \cos N \\ &= \sin N (\sin U \cos N - \cos U \sin N) = \sin N \sin (U - N) \end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned} &= -\sin U + \sin N \cos (U - N) \\ &= -\sin U + \sin U \sin N^2 + \cos U \sin N \cos N \\ &= -\sin U \cos N^2 + \cos U \sin N \cos N \\ &= -\cos N (\sin U \cos N - \cos U \sin N) = -\cos N \sin (U - N) \end{aligned}$$

ist :

$$67) \begin{cases} \cos U' = \mu \sin N \sin (U - N) - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin (U - N)^2}, \\ \sin U' = -\mu \cos N \sin (U - N) - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin (U - N)^2}. \end{cases}$$

Der gebrochene Strahl treffe jetzt die Ellipse in dem Punkte  $(X_1 Y_1)$ ; so ist, wenn der Strahl in diesem Punkte eine Zurückwerfung erleidet, nach den allgemeinen optischen Grundformeln, indem die Bedeutung der im Folgenden gebrauchten Symbole aus dem Vorhergehenden gewiss ganz von selbst ohne alle weitere Erläuterung erhellen wird:

$$\begin{aligned} \cos U_1' &= -\cos U_1 + \cos (N_1) (\cos V_1 + \sqrt{1 - \sin V_1^2}), \\ \sin U_1' &= -\sin U_1 + \sin (N_1) (\cos V_1 + \sqrt{1 - \sin V_1^2}). \end{aligned}$$

Nun ist aber nach dem schon vorher angewandten bekannten Satze der analytischen Geometrie allgemein

$$\cos V_1 = \cos U_1 \cos (N_1) + \sin U_1 \sin (N_1),$$

d. i. allgemein

$$\cos V_1 = \cos (U_1 - (N_1)), \quad \sin U' = \sin U_1 \sin (N_1) \quad (68)$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} \cos U_1' &= -\cos U_1 + \cos (N_1) \{ \cos (U_1 - (N_1)) \pm \cos (U_1 - (N_1)) \}, \\ \sin U_1' &= -\sin U_1 + \sin (N_1) \{ \cos (U_1 - (N_1)) \pm \cos (U_1 - (N_1)) \}, \end{aligned}$$

wo die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, nun aber die Frage entsteht, welche dieser Zeichen man zu nehmen hat, die auf folgende Art leicht beantwortet werden kann.

Nähme man die unteren Zeichen, so erhielte man

$$\cos U_1' = -\cos U_1, \quad \sin U_1' = -\sin U_1;$$

also

$$\tan U_1' = \tan U_1.$$

Die Gleichungen der geraden Linien, in denen der einfallende und zurückgeworfene Strahl liegen, sind aber bekanntlich

$$y - Y_1 = (x - X_1) \tan U_1$$

und



$y - Y_1 = (x - X_1) \tan U_1'$ ,  
so dass also diese beiden geraden Linien im Allgemeinen zusammenfallen würden, wenn man die untern Zeichen nehmen wollte, was jedenfalls ungereimt ist. Daher muss man die oberen Zeichen nehmen.

Nimmt man aber diesem gemäss in den beiden obigen Gleichungen die oberen Zeichen, so werden diese Gleichungen

$$\cos U_1' = -\cos U_1 + 2 \cos(N_1) \cos(U_1 - (N_1)),$$

$$\sin U_1' = -\sin U_1 + 2 \sin(N_1) \cos(U_1 - (N_1));$$

d. i.

$$\cos U_1' = -\cos U_1 + 2 \cos(N_1)^2 \cos U_1 + 2 \sin(N_1) \cos(N_1) \sin U_1,$$

$$\sin U_1' = -\sin U_1 + 2 \sin(N_1)^2 \sin U_1 + 2 \sin(N_1) \cos(N_1) \cos U_1$$

oder

$$\cos U_1' = -\{1 - 2 \cos(N_1)^2\} \cos U_1 + 2 \sin(N_1) \cos(N_1) \sin U_1,$$

$$\sin U_1' = -\{1 - 2 \sin(N_1)^2\} \sin U_1 + 2 \sin(N_1) \cos(N_1) \cos U_1;$$

d. i. nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\cos U_1' = \cos U_1 \cos 2(N_1) + \sin U_1 \sin 2(N_1),$$

$$\sin U_1' = -\sin U_1 \cos 2(N_1) + \cos U_1 \sin 2(N_1);$$

also

$$\cos U_1' = \cos(U_1 - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = -\sin(U_1 - 2(N_1)).$$

Nun ist aber offenbar entweder

$$U_1 = U' + 180^\circ$$

oder

$$U' = U_1 + 180^\circ,$$

also

$$U_1 = U' \pm 180^\circ,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\cos U_1' = \cos(U' - 2(N_1) \pm 180^\circ),$$

$$\sin U_1' = -\sin(U' - 2(N_1) \pm 180^\circ);$$

d. i. allgemein

$$68) \begin{cases} \cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)), \\ \sin U_1' = -\sin(U' - 2(N_1)). \end{cases}$$

Der zurückgeworfene Strahl treffe nun ferner die Ellipse (in dem Punkte  $(X_2, Y_2)$ ), und erleide in demselben eine Brechung; so ist, indem die Bedeutung aller im Folgenden gebrauchten Symbole



nach dem Vorhergehenden gewiss ganz von selbst verständlich sein wird, nach den allgemeinen optischen Grundformeln

$$\cos U_2' = -\frac{1}{\mu} \cos U_2 + \cos(N_2) \left( \frac{1}{\mu} \cos V_2 - \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2 V_2} \right),$$

$$\sin U_2' = -\frac{1}{\mu} \sin U_2 + \sin(N_2) \left( \frac{1}{\mu} \cos V_2 - \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2 V_2} \right);$$

und nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie

$$\cos V_2 = \cos U_2 \cos(N_2) + \sin U_2 \sin(N_2),$$

also

$$\cos V_2 = \cos(U_2 - (N_2));$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$\cos U_2' = -\frac{1}{\mu} \cos U_2 + \cos(N_2) \left\{ \frac{1}{\mu} \cos(U_2 - (N_2)) - \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_2 - (N_2))} \right\},$$

$$\sin U_2' = -\frac{1}{\mu} \sin U_2 + \sin(N_2) \left\{ \frac{1}{\mu} \cos(U_2 - (N_2)) - \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_2 - (N_2))} \right\};$$

woraus sich auf ganz ähnliche Art wie oben

$$\cos U_2' = \frac{1}{\mu} \sin(N_2) \sin(U_2 - (N_2)) - \cos(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_2 - (N_2))},$$

$$\sin U_2' = -\frac{1}{\mu} \cos(N_2) \sin(U_2 - (N_2)) - \sin(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_2 - (N_2))}$$

ergiebt. Nun ist aber entweder

$$U_2 = U_1' + 180^\circ$$

oder

$$U_1' = U_2 + 180^\circ,$$

also

$$U_2 = U_1' \pm 180^\circ,$$

und folglich allgemein

$$U_2 - (N_2) = U_1' - (N_2) \pm 180^\circ,$$

also

$$\cos(U_2 - (N_2)) = -\cos(U_1' - (N_2)),$$

$$\sin(U_2 - (N_2)) = -\sin(U_1' - (N_2));$$

folglich

$$69) \begin{cases} \cos U_2' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \cos(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_1' - (N_2))}, \\ \sin U_2' = \frac{1}{\mu} \cos(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \sin(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_1' - (N_2))}. \end{cases}$$



Erleidet aber der Strahl in dem Punkte  $(X_2, Y_2)$  eine zweite Zurückwerfung, so ist nach den allgemeinen optischen Grundformeln

$$\begin{aligned} \cos U_2' &= -\cos U_2 + \cos(N_2)(\cos V_2 - \sqrt{1 - \sin V_2^2}), \\ \sin U_2' &= -\sin U_2 + \sin(N_2)(\cos V_2 - \sqrt{1 - \sin V_2^2}); \end{aligned}$$

woraus sich auf ganz ähnliche Art wie oben

$$\begin{aligned} \cos U_2' &= \cos(U_2 - 2(N_2)), \\ \sin U_2' &= -\sin(U_2 - 2(N_2)) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos U_2' &= \cos(U_1' - 2(N_2) \pm 180^\circ), \\ \sin U_2' &= -\sin(U_1' - 2(N_2) \pm 180^\circ); \end{aligned}$$

d. i. allgemein

$$70) \begin{cases} \cos U_2' = -\cos(U_1' - 2(N_2)), \\ \sin U_2' = \sin(U_1' - 2(N_2)) \end{cases}$$

ergiebt.

Trifft dann der zurückgeworfene Strahl die Ellipse in dem Punkte  $(X_3, Y_3)$ , und erleidet in demselben eine Brechung; so ist, indem die Bedeutung aller im Folgenden gebrauchten Symbole nach dem Vorhergehenden ganz von selbst erhellen wird, auf ganz ähnliche Art wie oben:

$$71) \begin{cases} \cos U_3' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_3) \sin(U_2' - (N_3)) - \cos(N_3) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_2' - (N_3))^2}, \\ \sin U_3' = \frac{1}{\mu} \cos(N_3) \sin(U_2' - (N_3)) - \sin(N_3) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_2' - (N_3))^2}. \end{cases}$$

Für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung hat man also nach dem Vorhergehenden die folgenden Formeln:

$$72) \begin{cases} \cos U' = \mu \sin N \sin(U - N) - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U - N)^2}, \\ \sin U' = -\mu \cos N \sin(U - N) - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U - N)^2}; \\ \cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)), \\ \sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1)); \\ \cos U_2' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \cos(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_1' - (N_2))^2}, \\ \sin U_2' = \frac{1}{\mu} \cos(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \sin(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_1' - (N_2))^2}. \end{cases}$$



Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen hat man dagegen nach dem Vorhergehenden die folgenden Formeln:

$$73) \left\{ \begin{array}{l} \cos U' = \mu \sin N \sin(U - N) - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U - N)^2}, \\ \sin U' = -\mu \cos N \sin(U - N) - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U - N)^2}; \\ \cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)), \\ \sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1)); \\ \cos U_2' = -\cos(U_1' - 2(N_2)), \\ \sin U_2' = \sin(U_1' - 2(N_2)); \\ \cos U_3' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_3) \sin(U_2' - (N_3)) - \cos(N_3) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} (\sin U_2' - (N_3))^2}, \\ \sin U_3' = -\frac{1}{\mu} \cos(N_3) \sin(U_2' - (N_3)) - \sin(N_3) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_2' - (N_3))^2}. \end{array} \right.$$

Wie man die betreffenden Formeln für zwei Brechungen und eine grössere Anzahl von Zurückwerfungen zu construiren haben würde, unterliegt hiernach keinem Zweifel, und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Zur Bestimmung von

$N, (N_1), (N_2), (N_3)$  hat man nach §. 11. die folgenden Formeln:

$$74) \left\{ \begin{array}{l} \cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}; \\ \cos(N_1) = -\frac{b^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}, \quad \sin(N_1) = -\frac{a^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}; \\ \cos(N_2) = -\frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(N_2) = -\frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}; \\ \cos(N_3) = -\frac{b^2 X_3}{\sqrt{b^4 X_3^2 + a^4 Y_3^2}}, \quad \sin(N_3) = -\frac{a^2 Y_3}{\sqrt{b^4 X_3^2 + a^4 Y_3^2}}; \end{array} \right.$$

und es kommt also, um die Lage des letzten gebrochenen Strahls vollkommen bestimmen zu können, bloss noch auf die Entwicklung der Coordinaten

$$X_1, Y_1; X_2, Y_2; X_3, Y_3$$



an, mit welcher wir uns daher im folgenden Paragraphen zunächst beschäftigen wollen.

§. 13.

Die Gleichung des ersten gebrochenen Strahls ist bekanntlich

$$y - Y = (x - X) \operatorname{tang} U'.$$

Also ist, da der Punkt  $(X_1, Y_1)$  in diesem Strahle liegt,

$$Y_1 - Y = (X_1 - X) \operatorname{tang} U'.$$

Nun ist aber, weil  $(X, Y)$  und  $(X_1, Y_1)$  Punkte der Ellipse sind,

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{X_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y_1}{b}\right)^2 = 1;$$

also

$$\frac{X^2 + X_1^2}{a^2} + \frac{Y^2 + Y_1^2}{b^2} = 2,$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{(X - X_1)^2}{a^2} + \frac{(Y - Y_1)^2}{b^2} &= 2 \left( 1 - \frac{XX_1}{a^2} - \frac{YY_1}{b^2} \right) \\ &= 2 \left\{ 1 + \frac{X(X - X_1)}{a^2} + \frac{Y(Y - Y_1)}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \right\} \end{aligned}$$

$$= 2 \left\{ \frac{X(X - X_1)}{a^2} + \frac{Y(Y - Y_1)}{b^2} \right\}$$

oder

$$\frac{(X_1 - X)^2}{a^2} + \frac{(Y_1 - Y)^2}{b^2} = 2 \left\{ \frac{X(X_1 - X)}{a^2} + \frac{Y(Y_1 - Y)}{b^2} \right\},$$

d. i. nach dem Obigen

$$(X_1 - X)^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 U'}{b^2} \right)$$

$$= -2 \left\{ \frac{X(X_1 - X)}{a^2} + \frac{Y(X_1 - X) \operatorname{tang} U'}{b^2} \right\},$$

also, weil offenbar im Allgemeinen nicht  $X_1 - X \equiv 0$  ist:

$$(X_1 - X) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2 U'}{b^2} \right) = -2 \left( \frac{X}{a^2} + \frac{Y \operatorname{tang} U'}{b^2} \right).$$

Folglich ist, wie man leicht findet:

$$75) \begin{cases} X_1 - X = -2 \frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin^2 U' + b^2 \cos^2 U'} \cos U', \\ X_1 - Y = -2 \frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin^2 U' + b^2 \cos^2 U'} \sin U'; \end{cases}$$



oder

$$76) \begin{cases} X_1 = X - 2 \frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \cos U', \\ Y_1 = Y - 2 \frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \sin U'. \end{cases}$$

Ganz eben so ist aber

$$77) \begin{cases} X_2 = X_1 - 2 \frac{a^2 Y_1 \sin U'_1 + b^2 X_1 \cos U'_1}{a^2 \sin U_1'^2 + b^2 \cos U_1'^2} \cos U'_1, \\ Y_2 = Y_1 - 2 \frac{a^2 Y_1 \sin U'_1 + b^2 X_1 \cos U'_1}{a^2 \sin U_1'^2 + b^2 \cos U_1'^2} \sin U'_1; \end{cases}$$

und

$$78) \begin{cases} X_3 = X_2 - 2 \frac{a^2 Y_2 \sin U'_2 + b^2 X_2 \cos U'_2}{a^2 \sin U_2'^2 + b^2 \cos U_2'^2} \cos U'_2, \\ Y_3 = Y_2 - 2 \frac{a^2 Y_2 \sin U'_2 + b^2 X_2 \cos U'_2}{a^2 \sin U_2'^2 + b^2 \cos U_2'^2} \sin U'_2; \end{cases}$$

und wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel.

#### §. 14.

Stellen wir nun die sämtlichen gefundenen Formeln übersichtlich und so zusammen, dass sogleich deutlich erkannt werden kann, wie dieselben bei der Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls nach und nach in Anwendung zu bringen sind, so erhalten wir zuerst für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung:

$$79) \cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}};$$

$$\cos U' = \mu \sin N \sin(U - N) - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U - N)^2},$$

$$\sin U' = -\mu \cos N \sin(U - N) - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin(U - N)^2};$$

$$X_1 = X - 2 \frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \cos U',$$

$$Y_1 = Y - 2 \frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \sin U';$$

$$\cos(N_1) = -\frac{b^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}, \sin(N_1) = -\frac{a^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}};$$



$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$X_2 = X_1 - 2 \frac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin^2 U_1' + b^2 \cos^2 U_1'} \cos U_1',$$

$$Y_2 = Y_1 - 2 \frac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin^2 U_1' + b^2 \cos^2 U_1'} \sin U_1';$$

$$\cos(N_2) = -\frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(N_2) = -\frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}};$$

$$\cos U_2' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \cos(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_1' - (N_2))},$$

$$\sin U_2' = \frac{1}{\mu} \cos(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \sin(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_1' - (N_2))}.$$

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen hat man dagegen folgenden Formeln:

$$80) \cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}};$$

$$\cos U' = \mu \sin N \sin(U - N) - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2(U - N)},$$

$$\sin U' = -\mu \cos N \sin(U - N) - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2(U - N)};$$

$$X_1 = X - 2 \frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin^2 U' + b^2 \cos^2 U'} \cos U',$$

$$Y_1 = Y - 2 \frac{a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U'}{a^2 \sin^2 U' + b^2 \cos^2 U'} \sin U';$$

$$\cos(N_1) = -\frac{a^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}, \quad \sin(N_1) = -\frac{b^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}};$$

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$X_2 = X_1 - 2 \frac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin^2 U_1' + b^2 \cos^2 U_1'} \cos U_1',$$

$$Y_2 = Y_1 - 2 \frac{a^2 Y_1 \sin U_1' + b^2 X_1 \cos U_1'}{a^2 \sin^2 U_1' + b^2 \cos^2 U_1'} \sin U_1';$$



$$\cos(N_2) = -\frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(N_2) = -\frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}};$$

$$\cos U_2' = -\cos(U_1' - 2(N_2)),$$

$$\sin U_2' = \sin(U_1' - 2(N_2));$$

$$X_3 = X_2 - 2 \frac{a^2 Y_2 \sin U_2' + b^2 X_2 \cos U_2'}{a^2 \sin^2 U_2' + b^2 \cos^2 U_2'} \cos U_2',$$

$$Y_3 = Y_2 - 2 \frac{a^2 Y_2 \sin U_2' + b^2 X_2 \cos U_2'}{a^2 \sin^2 U_2' + b^2 \cos^2 U_2'} \sin U_2';$$

$$\cos(N_3) = -\frac{b^2 X_3}{\sqrt{b^4 X_3^2 + a^4 Y_3^2}}, \quad \sin(N_3) = -\frac{a^2 Y_3}{\sqrt{b^4 X_3^2 + a^4 Y_3^2}};$$

$$\cos U_3' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_3) \sin(U_2' - (N_3)) - \cos(N_3) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_2' - (N_3))},$$

$$\sin U_3' = \frac{1}{\mu} \cos(N_3) \sin(U_2' - (N_3)) - \sin(N_3) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(U_2' - (N_3))}.$$

Wie man in anderen complicirteren Fällen die betreffenden Formeln zu construiren hat, kann hiernach nicht im Geringsten zweifelhaft sein.

Auch würden sich aus den obigen Formeln noch eine ziemlich grosse Anzahl anderer Formeln ableiten lassen, die für jetzt jedoch absichtlich von uns übergangen, im Laufe der Untersuchung aber allerdings noch vorkommen werden. Die grössere Leichtigkeit der Rechnung, welche diese noch abzuleitenden Formeln vielleicht gestatten dürften, ist indess, streng genommen, wenigstens zum Theil eigentlich nur scheinbar, und ich glaube selbst, ohne übrigens auf weitere Erörterungen hierüber mich jetzt einzulassen, mich zu der Behauptung berechtigt halten zu dürfen, dass nur in den obigen Formeln die völlig strenge und allgemeine, nicht der geringsten Unbestimmtheit Raum lassende Auflösung unsers Problems enthalten ist, und dass es einfachere Formeln zur Auflösung desselben überhaupt nicht giebt, wenn man sich nicht der Verlegenheit aussetzen will, bei der Entscheidung über gewisse übrig bleibende Unbestimmtheiten rücksichtlich der Lage der verschiedenen Linien zu anderweitigen, nicht durch die Formeln selbst unmittelbar dargebotenen und von selbst an die Hand gegebenen Beurtheilungen seine Zuflucht nehmen zu müssen, was doch in allen Fällen gewiss wenigstens unangenehm, jedenfalls aber den Forderungen, die man



an eine vorzüglich durch ihre Strenge und Evidenz sich auszeichnen sollende Wissenschaft zu machen sich berechtigt halten darf, keinesweges gemäss und gehörig entsprechend ist. In der Folge werden an verschiedenen Orten noch einzelne Bemerkungen vorkommen, in denen die so eben ausgesprochenen Ansichten und Behauptungen nähere Erläuterung finden werden.

§. 15.

Wenn die im Vorhergehenden betrachtete Ellipse ein Kreis ist, so ist  $a = b$ , und man kann dann offenbar, was der Erleichterung der Rechnung wegen vortheilhaft ist, die Axe der  $x$  immer den einfallenden Strahlen parallel, und den positiven Theil dieser Axe von dem Mittelpunkte des Kreises an nach der Gegend hinnehmen, von welcher die einfallenden Strahlen her kommen, wo dann augenscheinlich der aus dem Vorhergehenden bekannte Winkel  $U = 0$  ist. Bezeichnen wir nun den Halbmesser dieses Kreises durch  $R$ , so dass

$$81) \quad x^2 + y^2 = R^2$$

seine Gleichung ist, so ergeben sich nach 79) für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls die folgenden Formeln:

$$82) \quad \cos N = \frac{X}{R}, \quad \sin N = \frac{Y}{R};$$

$$\cos U' = -\mu \sin N \sin N - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N},$$

$$\sin U' = \mu \cos N \sin N - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N};$$

$$X_1 = X - 2(Y \sin U' + X \cos U') \cos U'$$

$$= -X \cos 2 U' - Y \sin 2 U',$$

$$Y_1 = Y - 2(Y \sin U' + X \cos U') \sin U'$$

$$= -X \sin 2 U' + Y \cos 2 U';$$

$$\cos(N_1) = -\frac{X_1}{R}, \quad \sin(N_1) = -\frac{Y_1}{R};$$

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$X_2 = X_1 - 2(Y_1 \sin U_1' + X_1 \cos U_1') \cos U_1'$$

$$= -X_1 \cos 2 U_1' - Y_1 \sin 2 U_1',$$

$$Y_2 = Y_1 - 2(Y_1 \sin U_1' + X_1 \cos U_1') \sin U_1'$$

$$= -X_1 \sin 2 U_1' + Y_1 \cos 2 U_1';$$



$$\cos(N_2) = -\frac{X_2}{R}, \quad \sin(N_2) = -\frac{Y_2}{R};$$

$$\cos U_2' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \cos(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_1' - (N_2))^2},$$

$$\sin U_2' = \frac{1}{\mu} \cos(N_2) \sin(U_1' - (N_2)) - \sin(N_2) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_1' - (N_2))^2}.$$

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen hat man dagegen nach 80) die folgenden Formeln:

$$83) \quad \cos N = \frac{X}{R}, \quad \sin N = \frac{Y}{R};$$

$$\cos U' = -\mu \sin N \sin N - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N},$$

$$\sin U' = \mu \cos N \sin N - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N};$$

$$X_1 = X - 2(Y \sin U' + X \cos U') \cos U'$$

$$= -X \cos 2U' - Y \sin 2U',$$

$$Y_1 = Y - 2(Y \sin U' + X \cos U') \sin U'$$

$$= -X \sin 2U' + Y \cos 2U';$$

$$\cos(N_1) = -\frac{X_1}{R}, \quad \sin(N_1) = -\frac{Y_1}{R};$$

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$X_2 = X_1 - 2(Y_1 \sin U_1' + X_1 \cos U_1') \cos U_1'$$

$$= -X_1 \cos 2U_1' - Y_1 \sin 2U_1',$$

$$Y_2 = Y_1 - 2(Y_1 \sin U_1' + X_1 \cos U_1') \sin U_1'$$

$$= -X_1 \sin 2U_1' + Y_1 \cos 2U_1';$$

$$\cos(N_2) = -\frac{X_2}{R}, \quad \sin(N_2) = -\frac{Y_2}{R};$$

$$\cos U_2' = -\cos(U_1' - 2(N_2)),$$

$$\sin U_2' = \sin(U_1' - 2(N_2));$$

$$X_3 = X_2 - 2(Y_2 \sin U_2' + X_2 \cos U_2') \cos U_2'$$

$$= -X_2 \cos 2U_2' - Y_2 \sin 2U_2',$$

$$Y_3 = Y_2 - 2(Y_2 \sin U_2' + X_2 \cos U_2') \sin U_2'$$

$$= -X_2 \sin 2U_2' + Y_2 \cos 2U_2';$$

$$\cos(N_3) = -\frac{X_3}{R}, \quad \sin(N_3) = -\frac{Y_3}{R};$$



$$\cos U_3' = -\frac{1}{\mu} \sin(N_3) \sin(U_2' - (N_3)) - \cos(N_3) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_2' - (N_3))^2},$$

$$\sin U_3' = \frac{1}{\mu} \cos(N_3) \sin(U_2' - (N_3)) - \sin(N_3) \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(U_2' - (N_3))^2}.$$

Hiernach wird man bei dem Kreise auch für zwei Brechungen und jede beliebige Anzahl von Zurückwerfungen die betreffenden Formeln immer leicht aufzustellen im Stande sein.

## §. 16.

Zuvörderst wollen wir nun den Fall eines Kreises weiter entwickeln, indem wir uns dabei lediglich der im vorhergehenden Paragraphen zusammengestellten Formeln bedienen, und der Kürze wegen, was in diesem Falle offenbar verstattet ist,  $R=1$  setzen.

Unter dieser Voraussetzung ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$X_1 = -\cos N \cos 2U' - \sin N \sin 2U'$$

$$= -\cos(N - 2U'),$$

$$Y_1 = -\cos N \sin 2U' + \sin N \cos 2U'$$

$$= \sin(N - 2U');$$

$$\cos(N_1) = \cos(N - 2U'),$$

$$\sin(N_1) = -\sin(N - 2U');$$

$$\cos 2(N_1) = \cos 2(N - 2U'),$$

$$\sin 2(N_1) = -\sin 2(N - 2U');$$

$$\cos U_1' = -\cos 2(N_1) \cos U' - \sin 2(N_1) \sin U'$$

$$= -\cos 2(N - 2U') \cos U' + \sin 2(N - 2U') \sin U'$$

$$= -\cos(2N - 3U'),$$

$$\sin U_1' = \cos 2(N_1) \sin U' - \sin 2(N_1) \cos U'$$

$$= \cos 2(N - 2U') \sin U' + \sin 2(N - 2U') \cos U'$$

$$= \sin(2N - 3U');$$

$$\cos 2U_1' = \cos 2(2N - 3U'),$$

$$\sin 2U_1' = -\sin 2(2N - 3U');$$

$$X_2 = \cos(N - 2U') \cos 2(2N - 3U') + \sin(N - 2U') \sin 2(2N - 3U')$$

$$= \cos(3N - 4U'),$$

$$Y_2 = -\cos(N - 2U') \sin 2(2N - 3U') + \sin(N - 2U') \cos 2(2N - 3U')$$

$$= -\sin(3N - 4U');$$



$$\cos(N_2) = -\cos(3N - 4U'),$$

$$\sin(N_2) = \sin(3N - 4U');$$

$$\cos 2(N_2) = \cos 2(3N - 4U'),$$

$$\sin 2(N_2) = -\sin 2(3N - 4U');$$

$$\cos U_2' = -\cos 2(N_2) \cos U_1' - \sin 2(N_2) \sin U_1'$$

$$= \cos 2(3N - 4U') \cos(2N - 3U') + \sin 2(3N - 4U') \sin(2N - 3U')$$

$$= \cos(4N - 5U'),$$

$$\sin U_2' = \cos 2(N_2) \sin U_1' - \sin 2(N_2) \cos U_1'$$

$$= \cos 2(3N - 4U') \sin(2N - 3U') - \sin 2(3N - 4U') \cos(2N - 3U')$$

$$= -\sin(4N - 5U');$$

$$\cos 2 U_2' = \cos 2(4N - 5U'),$$

$$\sin 2 U_2' = -\sin 2(4N - 5U');$$

$$X_3 = -\cos(3N - 4U') \cos 2(4N - 5U') - \sin(3N - 4U') \sin 2(4N - 5U')$$

$$= -\cos(5N - 6U'),$$

$$Y_3 = \cos(3N - 4U') \sin 2(4N - 5U') - \sin(3N - 4U') \cos 2(4N - 5U')$$

$$= \sin(5N - 6U');$$

$$\cos(N_3) = \cos(5N - 6U'),$$

$$\sin(N_3) = -\sin(5N - 6U');$$

$$\cos 2(N_3) = \cos 2(5N - 6U'),$$

$$\sin 2(N_3) = -\sin 2(5N - 6U');$$

$$\cos U_3' = -\cos 2(N_3) \cos U_2' - \sin 2(N_3) \sin U_2'$$

$$= -\cos 2(5N - 6U') \cos(4N - 5U') - \sin 2(5N - 6U') \sin(4N - 5U')$$

$$= -\cos(6N - 7U'),$$

$$\sin U_3' = \cos 2(N_3) \sin U_2' - \sin 2(N_3) \cos U_2'$$

$$= -\cos 2(5N - 6U') \sin(4N - 5U') + \sin 2(5N - 6U') \cos(4N - 5U')$$

$$= \sin(6N - 7U');$$

$$\cos 2 U_3' = \cos 2(6N - 7U'),$$

$$\sin 2 U_3' = -\sin 2(6N - 7U');$$

$$X_4 = \cos(5N - 6U') \cos 2(6N - 7U') + \sin(5N - 6U') \sin 2(6N - 7U')$$

$$= \cos(7N - 8U'),$$

$$Y_4 = -\cos(5N - 6U') \sin 2(6N - 7U') + \sin(5N - 6U') \cos 2(6N - 7U')$$

$$= -\sin(7N - 8U');$$

$$\cos(N_4) = -\cos(7N - 8U'),$$

$$\sin(N_4) = \sin(7N - 8U').$$

Diese Rechnung, deren weiterer Fortgang klar vor Augen liegt,



ist hier so weit geführt worden, wie es für zwei Brechungen und drei Zurückwerfungen erforderlich ist. Für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung muss man bei den Formeln für  $\cos(N_2)$ ,  $\sin(N_2)$ ; für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen muss man bei den Formeln für  $\cos(N_3)$ ,  $\sin(N_3)$  stehen bleiben.

Für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung ist nun

$$\begin{aligned}\cos(U'_1 - (N_2)) &= \cos(N_2) \cos U'_1 + \sin(N_2) \sin U'_1 \\ &= \cos(3N - 4U') \cos(2N - 3U') + \sin(3N - 4U') \sin(2N - 3U') \\ &= \cos(N - U'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(U'_1 - (N_2)) &= \cos(N_2) \sin U'_1 - \sin(N_2) \cos U'_1 \\ &= -\cos(3N - 4U') \sin(2N - 3U') + \sin(3N - 4U') \cos(2N - 3U') \\ &= \sin(N - U');\end{aligned}$$

und zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls hat man also nach dem Obigen in diesem Falle die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}X_2 &= \cos(3N - 4U'), \\ Y_2 &= -\sin(3N - 4U'); \\ \cos U'_2 &= -\frac{1}{\mu} \sin(3N - 4U') \sin(N - U') \\ &\quad + \cos(3N - 4U') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(N - U')}, \\ \sin U'_2 &= -\frac{1}{\mu} \cos(3N - 4U') \sin(N - U') \\ &\quad - \sin(3N - 4U') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(N - U')}.\end{aligned}$$

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen ist

$$\begin{aligned}\cos(U'_2 - (N_3)) &= \cos(N_3) \cos U'_2 + \sin(N_3) \sin U'_2 \\ &= \cos(5N - 6U') \cos(4N - 5U') + \sin(5N - 6U') \sin(4N - 5U') \\ &= \cos(N - U'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(U'_2 - (N_3)) &= \cos(N_3) \sin U'_2 - \sin(N_3) \cos U'_2 \\ &= -\cos(5N - 6U') \sin(4N - 5U') + \sin(5N - 6U') \cos(4N - 5U') \\ &= \sin(N - U');\end{aligned}$$

und zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls hat man also nach dem Obigen in diesem Falle die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}X_3 &= -\cos(5N - 6U'), \\ Y_3 &= \sin(5N - 6U');\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\cos U_3' &= \frac{1}{\mu} \sin(5N - 6U') \sin(N - U') \\ &\quad - \cos(5N - 6U') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N - U')^2}, \\ \sin U_3' &= \frac{1}{\mu} \cos(5N - 6U') \sin(N - U') \\ &\quad + \sin(5N - 6U') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N - U')^2}.\end{aligned}$$

Für zwei Brechungen und drei Zurückwerfungen ist:

$$\begin{aligned}\cos(U_3' - (N_4)) &= \cos(N_4) \cos U_3' + \sin(N_4) \sin U_3' \\ &= \cos(7N - 8U') \cos(6N - 7U') + \sin(7N - 8U') \sin(6N - 7U') \\ &= \cos(N - U'), \\ \sin(U_3' - (N_4)) &= \cos(N_4) \sin U_3' - \sin(N_4) \cos U_3' \\ &= -\cos(7N - 8U') \sin(6N - 7U') + \sin(7N - 8U') \cos(6N - 7U') \\ &= \sin(N - U');\end{aligned}$$

und zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls hat man also in diesem Falle die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}X_4 &= \cos(7N - 8U'), \\ Y_4 &= -\sin(7N - 8U'); \\ \cos U_4' &= -\frac{1}{\mu} \sin(7N - 8U') \sin(N - U') \\ &\quad + \cos(7N - 8U') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N - U')^2}, \\ \sin U_4' &= -\frac{1}{\mu} \cos(7N - 8U') \sin(N - U') \\ &\quad - \sin(7N - 8U') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N - U')^2}.\end{aligned}$$

Wie man auf diese Art weiter gehen könnte, ist klar. Bei der ferneren Entwicklung dieser Formeln wollen wir uns jedoch der Kürze wegen für jetzt bloss auf die zwei ersten der drei vorhergehenden Fälle beschränken, werden aber die Rechnung so führen, dass die Art und Weise des weiteren Fortgangs derselben klar und deutlich vor Augen liegt, und ein Jeder die betreffenden Formeln leicht zu entwickeln im Stande ist. Späterhin werden wir übrigens auf diesen Gegenstand nochmals in grösserer Allgemeinheit



zurückkommen, indem wir uns absichtlich für jetzt auf die Entwicklungen beschränken, welche für die Theorie des Regenbogens unbedingt erforderlich sind.

Weil nach dem Obigen

$$\cos U' = -\mu \sin N \sin N - \cos N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N},$$

$$\sin U' = \mu \cos N \sin N - \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\cos (N - U') = \cos N \cos U' + \sin N \sin U'$$

$$= -\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N},$$

$$\sin (N - U') = \sin N \cos U' - \cos N \sin U'$$

$$= -\mu \sin N;$$

$$\cos 2(N - U') = \cos^2 (N - U') - \sin^2 (N - U')$$

$$= 1 - 2\mu^2 \sin^2 N,$$

$$\sin 2(N - U') = 2 \sin (N - U') \cos (N - U')$$

$$= 2\mu \sin N \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N};$$

$$\cos 4(N - U') = \cos^2 2(N - U') - \sin^2 2(N - U')$$

$$= 1 - 8\mu^2 \sin^2 N + 8\mu^4 \sin^4 N,$$

$$\sin 4(N - U') = \sin 2(N - U') \cos 2(N - U') + \cos 2(N - U') \sin 2(N - U')$$

$$= 4\mu \sin N (1 - 2\mu^2 \sin^2 N) \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N};$$

$$\cos 6(N - U') = \cos^4 2(N - U') - \sin^4 2(N - U')$$

$$= 1 - 18\mu^2 \sin^2 N + 48\mu^4 \sin^4 N - 32\mu^6 \sin^6 N,$$

$$\sin 6(N - U') = \sin 4(N - U') \cos 2(N - U') + \cos 4(N - U') \sin 2(N - U')$$

$$= 2\mu \sin N (3 - 16\mu^2 \sin^2 N + 16\mu^4 \sin^4 N) \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N},$$

u. s. w.

Hieraus ergibt sich aber ferner ohne alle Schwierigkeit:

$$\cos (3N - 4U') = \cos 4(N - U') \cos N + \sin 4(N - U') \sin N$$

$$= (1 - 8\mu^2 \sin^2 N + 8\mu^4 \sin^4 N) \cos N$$

$$+ 4\mu \sin N^2 (1 - 2\mu^2 \sin^2 N) \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N},$$

$$\sin (3N - 4U') = \sin 4(N - U') \cos N - \cos 4(N - U') \sin N$$

$$= - (1 - 8\mu^2 \sin^2 N + 8\mu^4 \sin^4 N) \sin N$$

$$+ 4\mu \sin N \cos N (1 - 2\mu^2 \sin^2 N) \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N};$$

$$\cos (5N - 6U') = \cos 6(N - U') \cos N + \sin 6(N - U') \sin N$$

$$= (1 - 18\mu^2 \sin^2 N + 48\mu^4 \sin^4 N - 32\mu^6 \sin^6 N) \cos N$$

$$+ 2\mu \sin N^2 (3 - 16\mu^2 \sin^2 N + 16\mu^4 \sin^4 N) \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 N};$$



$$\begin{aligned} \sin(5N - 6U') &= \sin 6(N - U') \cos N - \cos 6(N - U') \sin N \\ &= - (1 - 18\mu^2 \sin N^2 + 48\mu^4 \sin N^4 - 32\mu^6 \sin N^6) \sin N \\ &\quad + 2\mu \sin N \cos N (3 - 16\mu^2 \sin N^2 + 16\mu^4 \sin N^4) \sqrt{1 - \mu^2 \sin N^2}; \\ &\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\cos N = X, \quad \sin N = Y$$

und

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N - U')^2} = \sqrt{1 - Y^2} = X$$

ist, wobei man zu beachten hat, dass unter den gemachten Voraussetzungen offenbar  $X$  positiv ist; so erhält man aus dem Obigen für zwei Brechungen und eine Zurückwerfung zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls leicht die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 84) \quad X_2 &= X(1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4) \\ &\quad + 4\mu Y^2 (1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}, \\ Y_2 &= Y(1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4) \\ &\quad - 4\mu XY (1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}; \\ \cos U_2' &= (X^2 - Y^2)(1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4) \\ &\quad + 8\mu XY^2 (1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}, \\ \sin U_2' &= 2XY(1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4) \\ &\quad - 4\mu Y(X^2 - Y^2)(1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}. \end{aligned}$$

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher der letzte gebrochene Strahl liegt, ist

$$85) \quad y - Y_2 = (x - X_2) \tan U_2',$$

und kann also nach dem Vorhergehenden auch leicht vollständig entwickelt werden.

Für zwei Brechungen und zwei Zurückwerfungen erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} 86) \quad X_3 &= -X(1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6) \\ &\quad - 2\mu Y^2 (3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}, \\ Y_3 &= -Y(1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6) \\ &\quad + 2\mu XY(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}; \end{aligned}$$



$$\cos U_3' = - (X^2 - Y^2) (1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6) \\ - 4\mu XY^2 (3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2},$$

$$\sin U_3' = - 2XY (1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6) \\ + 2\mu Y (X^2 - Y^2) (3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}.$$

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher der letzte gebrochene Strahl liegt, ist

$$87) \quad y - Y_3 = (x - X_3) \tan U_3',$$

und kann also nach den vorhergehenden Formeln auch leicht in vollständig entwickelter Gestalt dargestellt werden.

### §. 17.

Um nun die Punkte des Kreises zu bestimmen, welchen unter Voraussetzung paralleler Strahlen in den beiden vorhergehenden Fällen die wirksamen Strahlen entsprechen, muss man die beiden Differentialquotienten

$$\frac{\partial U_2'}{\partial X} \text{ und } \frac{\partial U_3'}{\partial X}$$

entwickeln, und dieselben der Null gleich setzen, was nach den in §. 5. angestellten Betrachtungen jetzt einer besonderen Erläuterung gewiss nicht mehr bedürfen wird. Am leichtesten führt man aber die Entwicklung dieser beiden Differentialquotienten auf folgende Art aus.

Aus 84) ergibt sich zuvörderst

$$(X^2 - Y^2) \cos U_2' + 2XY \sin U_2' \\ = \{ (X^2 - Y^2)^2 + 4X^2 Y^2 \} (1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4), \\ 2XY \cos U_2' - (X^2 - Y^2) \sin U_2' \\ = 4\mu Y \{ (X^2 - Y^2)^2 + 4X^2 Y^2 \} (1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2};$$

d. i., weil

$$(X^2 - Y^2)^2 + 4X^2 Y^2 = (X^2 + Y^2)^2 = 1$$

ist:

$$(X^2 - Y^2) \cos U_2' + 2XY \sin U_2' = 1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4, \\ 2XY \cos U_2' - (X^2 - Y^2) \sin U_2' = 4\mu Y (1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}.$$

Weil nun aber

$$X^2 + Y^2 = 1$$

ist, so ist



$$X + Y \frac{\partial Y}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{X}{Y};$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial (X^2 - Y^2)}{\partial X} = 4X, \quad \frac{\partial XY}{\partial X} = -\frac{X^2 - Y^2}{Y};$$

$$\frac{\partial (1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4)}{\partial X} = 16\mu^2 X (1 - 2\mu^2 Y^2).$$

Differentiirt man nun die Gleichung

$$(X^2 - Y^2) \cos U_2' + 2XY \sin U_2' = 1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4,$$

so erhält man nach leichter Rechnung

$$\{2XY \cos U_2' - (X^2 - Y^2) \sin U_2'\} \left(2 + Y \frac{\partial U_2'}{\partial X}\right) = 16\mu^2 XY (1 - 2\mu^2 Y^2),$$

also nach dem Obigen, wenn man zugleich aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} \cdot \left(2 + Y \frac{\partial U_2'}{\partial X}\right) = 4\mu X,$$

woraus sich sogleich

$$88) \quad \frac{\partial U_2'}{\partial X} = \frac{2(2\mu X - \sqrt{1 - \mu^2 Y^2})}{Y \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}}$$

ergiebt.

Auf ganz ähnliche Art ist nach 86)

$$\begin{aligned} & (X^2 - Y^2) \cos U_3' + 2XY \sin U_3' \\ &= - (1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6), \\ & 2XY \cos U_3' - (X^2 - Y^2) \sin U_3' \\ &= - 2\mu Y (3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}. \end{aligned}$$

Auch ergiebt sich leicht durch Differentiation

$$\frac{\partial (1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6)}{\partial X}$$

$$= 12\mu^2 X (3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4).$$

Differentiirt man aber die Gleichung

$$\begin{aligned} & (X^2 - Y^2) \cos U_3' + 2XY \sin U_3' \\ &= - (1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6), \end{aligned}$$

so erhält man nach leichter Rechnung



$$\{2XY \cos U_3' - (X^2 - Y^2) \sin U_3'\} \left(2 + Y \frac{\partial U_3'}{\partial X}\right)$$

$$= -12\mu^2 XY (3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4),$$

also nach dem Obigen, wenn man zugleich aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} \cdot \left(2 + Y \frac{\partial U_3'}{\partial X}\right) = 6\mu X,$$

Woraus sich sogleich

$$89) \frac{\partial U_3'}{\partial X} = \frac{2(3\mu X - \sqrt{1 - \mu^2 Y^2})}{Y\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}}$$

ergiebt.

Wir wollen nun auch noch die zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} \text{ und } \frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2}$$

entwickeln.

Zuerst ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_2'}{\partial X} = -\frac{2}{Y} + \frac{4\mu X}{Y\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}},$$

also, wenn man differentiirt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} &= \frac{2}{Y^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{4\mu X}{Y^2 \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} \\ &\quad + \frac{4\mu}{Y} \cdot \frac{1 - \mu^2 Y^2 + \mu^2 XY \frac{\partial Y}{\partial X}}{(1 - \mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} \\ &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{4\mu X^2}{Y^3 \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} + \frac{4\mu(1 - \mu^2)}{Y(1 - \mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} \\ &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{4\mu(X^2 + Y^2) - 4\mu^3 Y^2(1 + X^2)}{Y^3(1 - \mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} \\ &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{4\mu - 4\mu^3(1 - X^2)(1 + X^2)}{Y^3(1 - \mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} \\ &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{4\mu - 4\mu^3(1 - X^4)}{Y^3(1 - \mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}}. \end{aligned}$$

also



$$90) \frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3} \left\{ X - \frac{2\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \right\}.$$

Auf ähnliche Art ist nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_3'}{\partial X} = -\frac{2}{Y} + \frac{6\mu X}{Y\sqrt{1-\mu^2 Y^2}},$$

also, wenn man differentiirt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2} &= \frac{2}{Y^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{6\mu X}{Y^2\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} \\ &\quad + \frac{6\mu}{Y} \cdot \frac{1-\mu^2 Y^2 + \mu^2 XY \frac{\partial Y}{\partial X}}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \\ &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{6\mu X^2}{Y^3\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} + \frac{6\mu(1-\mu^2)}{Y(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \\ &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{6\mu(X^2+Y^2)-6\mu^3 Y^2(1+X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \\ &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{6\mu-6\mu^3(1-X^2)(1+X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \\ &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{6\mu-6\mu^3(1-X^4)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}, \end{aligned}$$

also

$$91) \frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3} \left\{ X - \frac{3\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \right\}.$$

§. 18.

Setzen wir nun

$$\frac{\partial U_2'}{\partial X} = \frac{2(2\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2})}{Y\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung

$$2\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2} = 0,$$

oder

$$2\mu X = \sqrt{1-\mu^2 Y^2},$$

woraus sich



$$4\mu^2 X^2 = 1 - \mu^2 Y^2 = 1 - \mu^2(1 - X^2) = 1 - \mu^2 + \mu^2 X^2,$$

also

$$3\mu^2 X^2 = 1 - \mu^2 = (1 - \mu)(1 + \mu),$$

folglich

$$X^2 = \frac{1 - \mu^2}{3\mu^2} = \frac{(1 - \mu)(1 + \mu)}{3\mu^2},$$

$$Y^2 = 1 - X^2 = \frac{4\mu^2 - 1}{3\mu^2} = \frac{(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{3\mu^2};$$

also, weil  $X$  im vorliegenden Falle unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls positiv sein muss,

$$92) \begin{cases} X = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{(1 - \mu)(1 + \mu)}{3}}, \\ Y = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 - 1}{3}} = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{3}} \end{cases}$$

ergibt.

Berechnen wir den diesen Werthen von  $X$  und  $Y$  entsprechenden Werth des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3} \left\{ X - \frac{2\mu(1 - \mu^2(1 - X^4))}{(1 - \mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} \right\},$$

so ist zuvörderst

$$\begin{aligned} 1 - \mu^2(1 - X^4) &= 1 - \mu^2 + \mu^2 X^4 = 1 - \mu^2 + \frac{(1 - \mu^2)^2}{9\mu^2} \\ &= \frac{(1 - \mu^2)(1 + 8\mu^2)}{9\mu^2}, \end{aligned}$$

also

$$2\mu(1 - \mu^2(1 - X^4)) = \frac{2(1 - \mu^2)(1 + 8\mu^2)}{9\mu};$$

und

$$1 - \mu^2 Y^2 = 1 - \frac{4\mu^2 - 1}{3} = \frac{4(1 - \mu^2)}{3},$$

$$\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = 2 \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}},$$

$$(1 - \mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = \frac{8(1 - \mu^2) \sqrt{1 - \mu^2}}{3\sqrt{3}}.$$



Folglich ist

$$\frac{2\mu(1 - \mu^2(1 - X^4))}{(1 - \mu^2 Y^2)\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} = \frac{1 + 8\mu^2}{4\sqrt{3}\mu\sqrt{1 - \mu^2}},$$

also

$$\begin{aligned} X - \frac{2\mu(1 - \mu^2(1 - X^4))}{(1 - \mu^2 Y^2)\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} &= \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}} - \frac{1 + 8\mu^2}{4\sqrt{3}\mu\sqrt{1 - \mu^2}} \\ &= \frac{4(1 - \mu^2) - (1 + 8\mu^2)}{4\sqrt{3}\mu\sqrt{1 - \mu^2}} = \frac{(1 - 4\mu^2)\sqrt{3}}{4\mu\sqrt{1 - \mu^2}}. \end{aligned}$$

Daher ist für die obigen Werthe von  $X$  und  $Y$ , wie man leicht findet:

$$93) \frac{\partial^2 U_2'}{\partial X^2} = \pm \frac{9\mu^2}{2\sqrt{(1 - \mu^2)(4\mu^2 - 1)}}.$$

Aus den obigen Ausdrücken von  $X$  und  $Y$  ergibt sich auf der Stelle, dass unser Problem nur unter der Voraussetzung, dass

$$\mu = M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

ist, möglich ist. Weil nun, dies vorausgesetzt, nach dem Vorhergehenden der zweite Differentialquotient positiv oder negativ ist, je nachdem man in dem obigen Ausdrucke von  $Y$  das obere oder untere Zeichen nimmt, so ist nach der Lehre von den Maximis und Minimis der Winkel  $U_2'$  ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem man in dem obigen Ausdrucke von  $Y$  das obere oder untere Zeichen nimmt, d. h. je nachdem  $Y$  positiv oder negativ ist.

### §. 19.

Für die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Werthe von  $X$  und  $Y$  wollen wir nun die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls vollständig entwickeln.

Weil

$$X = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}}, \quad Y = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 - 1}{3}}$$

ist, so ist zuvörderst, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4 = \frac{41 - 160\mu^2 + 128\mu^4}{9},$$

$$(1 - 2\mu^2 Y^2)\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = \frac{2(5 - 8\mu^2)}{3} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}};$$



folglich

$$X(1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4) = \frac{41 - 160\mu^2 + 128\mu^4}{9\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}},$$

$$Y(1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4) = \pm \frac{41 - 160\mu^2 + 128\mu^4}{9\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 - 1}{3}};$$

ferner

$$4\mu Y^2(1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = - \frac{8(5 - 28\mu^2 + 32\mu^4)}{9\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}},$$

$$4\mu XY(1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = \pm \frac{8(5 - 13\mu^2 + 8\mu^4)}{9\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 - 1}{3}};$$

also nach 84)

$$94) \begin{cases} X_2 = \frac{1 + 64\mu^2 - 128\mu^4}{9\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}}, \\ Y_2 = \pm \frac{1 - 56\mu^2 + 64\mu^4}{9\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 - 1}{3}}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} & (X^2 - Y^2)(1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4) \\ &= \frac{82 - 525\mu^2 + 1056\mu^4 - 640\mu^6}{27\mu^2}, \\ & 2XY(1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4) \\ &= \pm \frac{2(41 - 160\mu^2 + 128\mu^4)}{27\mu^2} \sqrt{(1 - \mu^2)(4\mu^2 - 1)}; \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & 8\mu XY^2(1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} \\ &= - \frac{16(5 - 33\mu^2 + 60\mu^4 - 32\mu^6)}{27\mu^2}, \\ & 4\mu Y(X^2 - Y^2)(1 - 2\mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} \\ &= \pm \frac{8(10 - 41\mu^2 + 40\mu^4)}{27\mu^2} \sqrt{(1 - \mu^2)(4\mu^2 - 1)}; \end{aligned}$$

also nach 84):



$$95) \begin{cases} \cos U_2' = \frac{2 + 3\mu^2 + 96\mu^4 - 128\mu^6}{27\mu^2}, \\ \sin U_2' = \pm \frac{(2 + 8\mu^2 - 64\mu^4) \sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}{27\mu^2}. \end{cases}$$

Also ist die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls:

$$96) y \mp \frac{1 - 56\mu^2 + 64\mu^4}{9\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 - 1}{3}} \\ = \pm \frac{(2 + 8\mu^2 - 64\mu^4) \sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}{2 + 3\mu^2 + 96\mu^4 - 128\mu^6} \left( x - \frac{1 + 64\mu^2 - 128\mu^4}{9\mu} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{3}} \right).$$

Wollte man  $\mu$  aus  $U_2'$  bestimmen, so müsste man die folgende Gleichung, welche in Beziehung auf  $\mu^2$  als unbekannte Grösse vom dritten Grade ist, auflösen:

$$97) 128\mu^6 - 96\mu^4 - 3(1 - 9\cos U_2')\mu^2 - 2 = 0,$$

worüber wir uns hier der Kürze wegen jetzt nicht weiter verbreiten wollen.

Setzt man

$$\mu^4 - \frac{1}{8}\mu^2 - \frac{1}{32} = 0$$

und löst diese Gleichung auf, so erhält man

$$\mu^2 = \frac{1}{16} \pm \frac{3}{16} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mu^4 - \frac{1}{8}\mu^2 - \frac{1}{32} &= (\mu^2 - \frac{1}{4})(\mu^2 + \frac{1}{8}), \\ 2 + 8\mu^2 - 64\mu^4 &= -2(4\mu^2 - 1)(8\mu^2 + 1); \end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen

$$98) \sin U_2' = \mp \frac{2(4\mu^2 - 1)(8\mu^2 + 1) \sqrt{(1-\mu^2)(4\mu^2-1)}}{27\mu^2} \\ = \mp \frac{2(2\mu - 1)(2\mu + 1)(8\mu^2 + 1) \sqrt{(1-\mu)(1+\mu)(2\mu-1)(2\mu+1)}}{27\mu^2}.$$

Aus

$$\cos U_2' = \frac{2 + 3\mu^2 + 96\mu^4 - 128\mu^6}{27\mu^2}$$

folgt auch



$$1 - \cos U_2' = - \frac{2(1 - 12\mu^2 + 48\mu^4 - 64\mu^6)}{27\mu^2},$$

d. i.

$$2 \sin \frac{1}{2} U_2'^2 = - \frac{2(1 - 4\mu^2)^3}{27\mu^2},$$

und folglich

$$\sin \frac{1}{2} U_2'^2 = \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{4\mu^2 - 1}{3} \right)^3.$$

Weil nun offenbar  $\sin \frac{1}{2} U_2'$  immer positiv ist, so ist

$$99) \sin \frac{1}{2} U_2' = \frac{1}{\mu} \sqrt{\left( \frac{4\mu^2 - 1}{3} \right)^3}$$

$$= \frac{4\mu^2 - 1}{3\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 - 1}{3}}$$

$$= \frac{(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{3\mu} \sqrt{\frac{(2\mu - 1)(2\mu + 1)}{3}}.$$

Auch ist

$$1 + \cos U_2' = \frac{2(1 + 15\mu^2 + 48\mu^4 - 64\mu^6)}{27\mu^2},$$

und folglich, weil, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} 1 + 15\mu^2 + 48\mu^4 - 64\mu^6 &= (1 - \mu^2)(1 + 16\mu^2 + 64\mu^4) \\ &= (1 - \mu^2)(1 + 8\mu^2)^2 \end{aligned}$$

ist,

$$\cos \frac{1}{2} U_2'^2 = \frac{(1 - \mu^2)(1 + 8\mu^2)^2}{27\mu^2},$$

also

$$100) \cos \frac{1}{2} U_2' = \pm \frac{1 + 8\mu^2}{3\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{3}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem  $\frac{1}{2} U_2'$  kleiner oder grösser als  $180^\circ$  ist.

§. 20.

Setzen wir ferner

$$\frac{\partial U_3'}{\partial X} = \frac{2(3\mu X - \sqrt{1 - \mu^2 Y^2})}{Y \sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung

Beiträge z. meteorol. Optik. 1.



oder

$$3\mu X - \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = 0$$

woraus sich

$$3\mu X = \sqrt{1 - \mu^2 Y^2},$$

also

$$9\mu^2 X^2 = 1 - \mu^2 Y^2 = 1 - \mu^2(1 - X^2) = 1 - \mu^2 + \mu^2 X^2,$$

folglich

$$8\mu^2 X^2 = 1 - \mu^2 = (1 - \mu)(1 + \mu),$$

$$X^2 = \frac{1 - \mu^2}{8\mu^2} = \frac{(1 - \mu)(1 + \mu)}{8\mu^2},$$

$$Y^2 = 1 - X^2 = \frac{9\mu^2 - 1}{8\mu^2} = \frac{(3\mu - 1)(3\mu + 1)}{8\mu^2};$$

also, weil  $X$  im vorliegenden Falle unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls positiv sein muss:

$$101) \begin{cases} X = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{2}} = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{(1 - \mu)(1 + \mu)}{2}}, \\ Y = \pm \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{9\mu^2 - 1}{2}} = \pm \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{(3\mu - 1)(3\mu + 1)}{2}} \end{cases}$$

ergiebt.

Um den entsprechenden Werth des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3} \left\{ X - \frac{3\mu(1 - \mu^2(1 - X^4))}{(1 - \mu^2 Y^2)\sqrt{1 - \mu^2 Y^2}} \right\}$$

zu berechnen, haben wir zuvörderst

$$\begin{aligned} 1 - \mu^2(1 - X^4) &= 1 - \mu^2 + \mu^2 X^4 = 1 - \mu^2 + \frac{(1 - \mu^2)^2}{64\mu^2} \\ &= \frac{(1 - \mu^2)(1 + 63\mu^2)}{64\mu^2}, \end{aligned}$$

also

$$3\mu(1 - \mu^2(1 - X^4)) = \frac{3(1 - \mu^2)(1 + 63\mu^2)}{64\mu};$$

und

$$1 - \mu^2 Y^2 = 1 - \frac{9\mu^2 - 1}{8} = \frac{9(1 - \mu^2)}{8},$$

$$\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{2}},$$

$$(1 - \mu^2 Y^2) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = \frac{27(1 - \mu^2)\sqrt{1 - \mu^2}}{16\sqrt{2}}.$$



Folglich ist

$$\frac{3\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = \frac{1+63\mu^2}{18\sqrt{2}\cdot\mu\sqrt{1-\mu^2}},$$

also

$$\begin{aligned} X - \frac{3\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{2}} - \frac{1+63\mu^2}{18\sqrt{2}\cdot\mu\sqrt{1-\mu^2}} \\ &= \frac{9(1-\mu^2) - (1+63\mu^2)}{18\sqrt{2}\cdot\mu\sqrt{1-\mu^2}} = \frac{2(1-9\mu^2)\sqrt{2}}{9\mu\sqrt{1-\mu^2}}. \end{aligned}$$

Daher ist für die obigen Werthe von  $X$  und  $Y$ , wie man leicht findet:

$$102) \quad \frac{\partial^2 U_3'}{\partial X^2} = + \frac{128\mu^2}{9\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}.$$

Aus den obigen Ausdrücken von  $X$  und  $Y$  ergibt sich auf der Stelle, dass unser Problem nur unter der Voraussetzung, dass

$$\mu = M(1/3, 1)$$

ist, möglich ist. Weil nun, dies vorausgesetzt, nach dem Vorhergehenden der zweite Differentialquotient positiv oder negativ ist, jenachdem man in dem obigen Ausdrucke von  $Y$  das obere oder untere Zeichen nimmt, so ist nach den bekannten Principien der Lehre von den Maximis und Minimis der Winkel  $U_3'$  ein Minimum oder ein Maximum, jenachdem man in dem obigen Ausdrucke von  $Y$  das obere oder untere Zeichen nimmt, d. i. jenachdem  $Y$  positiv oder negativ ist.

## §. 21.

Auch für die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Werthe von  $X$  und  $Y$  wollen wir nun die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls vollständig entwickeln.

Weil

$$X = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{8}}, \quad Y = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{9\mu^2-1}{8}}$$

ist, so ist zuvörderst, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$\begin{aligned} &1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6 \\ &= \frac{65 - 567\mu^2 + 1215\mu^4 - 729\mu^6}{16}, \end{aligned}$$



$$(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} \\ = \frac{3(21 - 90\mu^2 + 81\mu^4)}{4} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{8}};$$

folglich

$$X(1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6) \\ = \frac{65 - 567\mu^2 + 1215\mu^4 - 729\mu^6}{16\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{8}},$$

$$Y(1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6) \\ = \pm \frac{65 - 567\mu^2 + 1215\mu^4 - 729\mu^6}{16\mu} \sqrt{\frac{9\mu^2 - 1}{8}};$$

ferner

$$2\mu Y^2(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} \\ = - \frac{3(21 - 279\mu^2 + 891\mu^4 - 729\mu^6)}{16\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{8}},$$

$$2\mu XY(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4) \sqrt{1 - \mu^2 Y^2} \\ = \pm \frac{3(21 - 111\mu^2 + 171\mu^4 - 81\mu^6)}{16\mu} \sqrt{\frac{9\mu^2 - 1}{8}};$$

also nach 86)

$$103) \left\{ \begin{array}{l} X_3 = - \frac{1 + 135\mu^2 - 729\mu^4 + 729\mu^6}{8\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{8}}, \\ Y_3 = \mp \frac{1 - 117\mu^2 + 351\mu^4 - 243\mu^6}{8\mu} \sqrt{\frac{9\mu^2 - 1}{8}}; \end{array} \right.$$

oder

$$104) \left\{ \begin{array}{l} X_3 = - \frac{1 + 135\mu^2 - 729\mu^4 + 729\mu^6}{16\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{2}}, \\ Y_3 = \mp \frac{1 - 117\mu^2 + 351\mu^4 - 243\mu^6}{16\mu} \sqrt{\frac{9\mu^2 - 1}{2}}. \end{array} \right.$$

Ferner ist

$$(X^2 - Y^2)(1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6) \\ = \frac{65 - 892\mu^2 + 4050\mu^4 - 6804\mu^6 + 3645\mu^8}{64\mu^2},$$



$$2XY(1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6) \\ = \pm \frac{(65 - 567\mu^2 + 1215\mu^4 - 729\mu^6)\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}{64\mu^2};$$

und

$$4\mu XY^2(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4)\sqrt{1-\mu^2 Y^2} \\ = - \frac{3(21 - 300\mu^2 + 1170\mu^4 - 1620\mu^6 + 729\mu^8)}{64\mu^2},$$

$$2\mu Y(X^2 - Y^2)(3 - 16\mu^2 Y^2 + 16\mu^4 Y^4)\sqrt{1-\mu^2 Y^2} \\ = \pm \frac{3(21 - 195\mu^2 + 531\mu^4 - 405\mu^6)\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}{64\mu^2};$$

also nach 86)

$$105) \begin{cases} \cos U_3' = - \frac{1 + 4\mu^2 + 270\mu^4 - 972\mu^6 + 729\mu^8}{32\mu^2}, \\ \sin U_3' = \pm \frac{(1 + 9\mu^2 - 189\mu^4 + 243\mu^6)\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}{32\mu^2}. \end{cases}$$

Die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls ist:

$$106) y \pm \frac{1 - 117\mu^2 + 351\mu^4 - 240\mu^6\sqrt{\frac{9\mu^2-1}{2}}}{16\mu} \\ = \pm \frac{(1 + 9\mu^2 - 189\mu^4 + 243\mu^6)\sqrt{(1-\mu^2)(9\mu^2-1)}}{1 + 4\mu^2 + 270\mu^4 - 972\mu^6 + 729\mu^8} \\ \times \left( x + \frac{1 + 135\mu^2 - 729\mu^4 + 729\mu^6\sqrt{\frac{1-\mu^2}{2}}}{16\mu} \right).$$

Will man  $\mu$  aus  $U_3'$  bestimmen, so muss man die Gleichung

$$107) 729\mu^8 - 972\mu^6 + 270\mu^4 + 4(1 + 8\cos U_3')\mu^2 + 1 = 0,$$

welche in Beziehung auf  $\mu^2$  als unbekannte Grösse vom vierten Grade ist, auflösen.

Auch ist

$$1 - \cos U_3' = \frac{1 + 36\mu^2 + 270\mu^4 - 972\mu^6 + 729\mu^8}{32\mu^2},$$

$$1 + \cos U_3' = - \frac{1 - 28\mu^2 + 270\mu^4 - 972\mu^6 + 729\mu^8}{32\mu^2};$$

also, wie man leicht findet:



$$108) \begin{cases} \sin^{1/2} U_3'^2 = \frac{(1 + 18\mu^2 - 27\mu^4)^2}{64\mu^2}, \\ \cos^{1/2} U_3'^2 = \frac{(1 - \mu^2)(9\mu^2 - 1)^3}{64\mu^2}. \end{cases}$$

§. 22.

Die im Vorhergehenden betrachteten Differentialquotienten werden in zwei Fällen unendlich, nämlich für

$$Y = 0 \text{ und } 1 - \mu^2 Y^2 = 0.$$

Im ersten Falle, den sich ein Jeder leicht selbst weiter zu deuten im Stande sein wird, geht die ganze Brechung und Zurückwerfung in dem den einfallenden Strahlen parallelen Durchmesser des Kreises vor sich.

Im zweiten Falle findet man leicht

$$X = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 - 1}, \quad Y = \pm \frac{1}{\mu};$$

woraus sogleich erhellet, dass dieser Fall nur dann eintreten kann, wenn  $\mu > 1$  ist; und da nun nach 82) und 83) bekanntlich

$$\cos N = X, \quad \sin N = Y$$

ist, so ist

$$\cos N = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 - 1}, \quad \sin N = \pm \frac{1}{\mu}.$$

Nehmen wir nun, was bei dieser Betrachtung offenbar hinreicht, das obere Zeichen, so ist unter den gemachten Voraussetzungen augenscheinlich  $N$  der Einfallswinkel, also nach den dioptrischen Grundgesetzen  $\mu \cdot \frac{1}{\mu} = 1$  der Sinus des Brechungswinkels, der Brechungswinkel selbst also  $90^\circ$ , so dass folglich in diesem Falle der gebrochene Strahl auf dem Einfallslothe senkrecht steht, und wir daher an der Gränze aller Brechung angelangt sind, welches weiter zu deuten wir füglich dem Leser überlassen können.

Sucht man in diesem letztern Falle nach 84) und 86) die Gleichungen der letzten gebrochenen Strahlen, so erhält man zuvörderst nach 84)

$$1 - 8\mu^2 Y^2 + 8\mu^4 Y^4 = 1$$

und

$$\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = 0,$$

also



$$109) \begin{cases} X_2 = X.1 = X = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 - 1}, \\ Y_2 = Y.1 = Y = \pm \frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Ferner ist

$$X^2 - Y^2 = \frac{\mu^2 - 2}{\mu^2}, \quad 2XY = \pm \frac{2\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^2};$$

also

$$110) \cos U_2' = \frac{\mu^2 - 2}{\mu^2}, \quad \sin U_2' = \pm \frac{2\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^2}.$$

Folglich ist

$$111) y \mp \frac{1}{\mu} = \pm \frac{2\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^2 - 2} \left( x - \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 - 1} \right)$$

die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls.

Auf ähnliche Art ist nach 86)

$$1 - 18\mu^2 Y^2 + 48\mu^4 Y^4 - 32\mu^6 Y^6 = -1$$

und

$$\sqrt{1 - \mu^2 Y^2} = 0;$$

also

$$112) \begin{cases} X_3 = -X. -1 = X = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 - 1}, \\ Y_3 = -Y. -1 = Y = \pm \frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Ferner ist wieder

$$X^2 - Y^2 = \frac{\mu^2 - 2}{\mu^2}, \quad 2XY = \pm \frac{2\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^2};$$

also

$$113) \cos U_3' = \frac{\mu^2 - 2}{\mu^2}, \quad \sin U_3' = \pm \frac{2\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^2};$$

und die Gleichung des letzten gebrochenen Strahls ist folglich auch jetzt

$$114) y \mp \frac{1}{\mu} = \pm \frac{2\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu^2 - 2} \left( x - \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu^2 - 1} \right).$$

Da durch die Gleichung 111) oder 114) offenbar eine ganz be-



stimmt reelle gerade Linie charakterisirt wird, so wird man diese gerade Linie nur als eine gewisse Gränze zu betrachten haben, welcher die letzten gebrochenen Strahlen sich nähern, wenn die einfallenden Strahlen sich der Gränze aller Brechung nähern, ein Ausdruck, dessen Sinn man nach dem Obigen gewiss ohne weitere Erläuterung verstehen wird.

§. 23.

Indem wir nun wieder zu den Formeln 79) und 80) für die Ellipse zurückkehren, wollen wir zuvörderst aus denselben einige andere bemerkenswerthe Formeln ableiten.

Aus den beiden Gleichungen

$$\cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}$$

folgt sogleich

$$b^2 X \sin N = a^2 Y \cos N$$

oder

$$b \frac{X}{a} \sin N = a \frac{Y}{b} \cos N,$$

also

$$b^2 \left( \frac{X}{a} \right)^2 \sin^2 N = a^2 \left( \frac{Y}{b} \right)^2 \cos^2 N.$$

Aus der Gleichung

$$\left( \frac{X}{a} \right)^2 + \left( \frac{Y}{b} \right)^2 = 1$$

ergeben sich aber die beiden folgenden Gleichungen:

$$a^2 \left( \frac{X}{a} \right)^2 \cos^2 N + a^2 \left( \frac{Y}{b} \right)^2 \cos^2 N = a^2 \cos^2 N,$$

$$b^2 \left( \frac{X}{a} \right)^2 \sin^2 N + b^2 \left( \frac{Y}{b} \right)^2 \sin^2 N = b^2 \sin^2 N;$$

folglich nach dem Vorhergehenden mittelst gehöriger Substitution

$$(a^2 \cos^2 N + b^2 \sin^2 N) \left( \frac{X}{a} \right)^2 = a^2 \cos^2 N,$$

$$(a^2 \cos^2 N + b^2 \sin^2 N) \left( \frac{Y}{b} \right)^2 = b^2 \sin^2 N.$$

Wegen der Gleichungen



$$\cos N = \frac{b^2 X}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}, \quad \sin N = \frac{a^2 Y}{\sqrt{b^4 X^2 + a^4 Y^2}}$$

haben sowohl  $X$  und  $\cos N$ , als auch  $Y$  und  $\sin N$ , gleiche Vorzeichen; also ist nach dem Vorhergehenden

$$115) \quad \begin{cases} \frac{X}{a} = \frac{a \cos N}{\sqrt{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2}}, \\ \frac{Y}{b} = \frac{b \sin N}{\sqrt{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2}}; \end{cases}$$

oder

$$116) \quad \begin{cases} \frac{X}{a} = \frac{\cos N}{\sqrt{\cos N^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin N^2}}, \\ \frac{Y}{b} = \frac{\sin N}{\sqrt{\sin N^2 + \frac{a^2}{b^2} \cos N^2}}; \end{cases}$$

oder

$$117) \quad \begin{cases} \frac{X}{a} = \frac{\cos N}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin N^2}}, \\ \frac{Y}{b} = \frac{\sin N}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cos N^2}}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 115) ergibt sich leicht

$$a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U' = \frac{a^2 b^2 \cos(N - U')}{\sqrt{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2}},$$

und folglich, weil

$$\sqrt{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2} = \frac{a^2 \cos N}{X} = \frac{b^2 \sin N}{Y}$$

ist:

$$a^2 Y \sin U' + b^2 X \cos U' = \frac{b^2 \cos(N - U')}{\cos N} X = \frac{a^2 \cos(N - U')}{\sin N} Y.$$

Also ist



$$118) \begin{cases} X_1 = \left\{ 1 - \frac{2b^2 \cos(N - U') \cos U'}{\cos N (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)} \right\} X, \\ Y_1 = \left\{ 1 - \frac{2a^2 \cos(N - U') \sin U'}{\sin N (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)} \right\} Y; \end{cases}$$

oder

$$119) \begin{cases} \frac{X_1}{a} = \left\{ 1 - \frac{2 \cos(N - U') \cos U'}{\cos N (\cos U'^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin U'^2)} \right\} \frac{X}{a}, \\ \frac{Y_1}{b} = \left\{ 1 - \frac{2 \cos(N - U') \sin U'}{\sin N (\sin U'^2 + \frac{b^2}{a^2} \cos U'^2)} \right\} \frac{Y}{b}; \end{cases}$$

oder

$$120) \begin{cases} \frac{X_1}{a} = \left\{ 1 - \frac{2 \cos(N - U') \cos U'}{\cos N (1 - (1 - \frac{a^2}{b^2}) \sin U'^2)} \right\} \frac{X}{a}, \\ \frac{Y_1}{b} = \left\{ 1 - \frac{2 \cos(N - U') \sin U'}{\sin N (1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \cos U'^2)} \right\} \frac{Y}{b}; \end{cases}$$

oder

$$121) \begin{cases} \frac{X_1}{a} = \left\{ 1 - \frac{\cos U'}{\cos N} \cdot \frac{2 \cos(N - U')}{1 - (1 - \frac{a^2}{b^2}) \sin U'^2} \right\} \frac{X}{a}, \\ \frac{Y_1}{b} = \left\{ 1 - \frac{\sin U'}{\sin N} \cdot \frac{2 \cos(N - U')}{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \cos U'^2} \right\} \frac{Y}{b}. \end{cases}$$

Weil nun

$$\text{tang}(N_1) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{Y_1}{X_1}$$

ist, so ist

$$\text{tang}(N_1) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1 - \frac{2a^2 \cos(N - U') \sin U'}{\sin N (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}}{1 - \frac{2b^2 \cos(N - U') \cos U'}{\cos N (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}} \cdot \frac{Y}{X},$$

und folglich, weil



$$\frac{Y}{X} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\sin N}{\cos N}$$

ist:

$$\operatorname{tang}(N_1) = \frac{\sin N}{\cos N} \cdot \frac{1 - \frac{2a^2 \cos(N - U') \sin U'}{\sin N (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}}{1 - \frac{2b^2 \cos(N - U') \cos U'}{\cos N (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)}},$$

woraus sich

$$\operatorname{tang}(N_1) = \frac{(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2) \sin N - 2a^2 \cos(N - U') \sin U'}{(a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2) \cos N - 2b^2 \cos(N - U') \cos U'},$$

und hieraus ferner mittelst leichter Entwicklung

$$122) \operatorname{tang}(N_1) = - \frac{(a^2 - b^2) \sin N \cos U'^2 - a^2 \sin(N - 2U')}{(a^2 - b^2) \cos N \sin U'^2 - b^2 \cos(N - 2U')},$$

oder

$$123) \operatorname{tang}(N_1) = - \frac{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin(N - 2U')}{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(N - 2U')},$$

wo

$$124) \frac{a^2}{e^2} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{-1}, \quad \frac{b^2}{e^2} = - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^{-1}$$

ist, ergiebt.

Stellt man die bekannten Formeln

$$\cos(N_1) = - \frac{b^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}, \quad \sin(N_1) = - \frac{a^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}$$

auf folgende Art dar:

$$\cos(\pi + (N_1)) = \frac{b^2 X_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}}, \quad \sin(\pi + (N_1)) = \frac{a^2 Y_1}{\sqrt{b^4 X_1^2 + a^4 Y_1^2}};$$

so erhellet aus 79) und 80) leicht, dass man  $\operatorname{tang}(N_2)$  aus dem vorhergehenden Ausdrucke von  $\operatorname{tang}(N_1)$  erhalten muss, wenn man in demselben für  $N$ ,  $U'$  respective  $\pi + (N_1)$ ,  $U_1'$  setzt, wodurch sich nach leichter Rechnung

$$125) \operatorname{tang}(N_2) = - \frac{\sin(N_1) \cos U_1'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin((N_1) - 2U_1')}{\cos(N_1) \sin U_1'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos((N_1) - 2U_1')}$$

ergiebt.



Wenn man aber die bekannten Formeln

$$\cos(N_2) = -\frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(N_2) = -\frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}$$

unter der Form

$$\cos(\pi + (N_2)) = \frac{b^2 X_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}, \quad \sin(\pi + (N_2)) = \frac{a^2 Y_2}{\sqrt{b^4 X_2^2 + a^4 Y_2^2}}$$

darstellt, so ergibt sich eben so aus 80), dass  $\tan(N_3)$  aus dem obigen Ausdrucke von  $\tan(N_1)$  erhalten werden muss, wenn man in demselben für  $N, U'$  respective  $\pi + (N_2), U_2'$  setzt, wodurch man nach leichter Rechnung

$$126) \tan(N_3) = -\frac{\sin(N_2) \cos U_2'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin((N_2) - 2U_2')}{\cos(N_2) \sin U_2'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos((N_2) - 2U_2')}$$

erhält.

Nun ist aber

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

folglich

$$\cos 2 U_1' = \cos 2(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin 2 U_1' = -\sin 2(U' - 2(N_1));$$

also

$$\begin{aligned} \sin((N_1) - 2U_1') &= \sin(N_1) \cos 2(U' - 2(N_1)) + \cos(N_1) \sin 2(U' - 2(N_1)) \\ &= \sin(2U' - 3(N_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos((N_1) - 2U_1') &= \cos(N_1) \cos 2(U' - 2(N_1)) - \sin(N_1) \sin 2(U' - 2(N_1)) \\ &= \cos(2U' - 3(N_1)); \end{aligned}$$

folglich nach 125)

$$127) \tan(N_2) = -\frac{\sin(N_1) \cos(U' - 2(N_1))^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin(2U' - 3(N_1))}{\cos(N_1) \sin(U' - 2(N_1))^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(2U' - 3(N_1))}.$$

Ferner ist

$$\cos U_2' = -\cos(U_1' - 2(N_2)),$$

$$\sin U_2' = \sin(U_1' - 2(N_2));$$

also



$$\begin{aligned}\cos U_2' &= -\cos U_1' \cos 2(N_2) - \sin U_1' \sin 2(N_2) \\ &= \cos(U' - 2(N_1)) \cos 2(N_2) - \sin(U' - 2(N_1)) \sin 2(N_2) \\ &= \cos(U' - 2(N_1) + 2(N_2)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin U_2' &= \sin U_1' \cos 2(N_2) - \cos U_1' \sin 2(N_2) \\ &= \sin(U' - 2(N_1)) \cos 2(N_2) + \cos(U' - 2(N_1)) \sin 2(N_2) \\ &= \sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2));\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}\cos 2 U_2' &= \cos 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2)), \\ \sin 2 U_2' &= \sin 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2));\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}&\sin((N_2) - 2 U_2') \\ &= \sin(N_2) \cos 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2)) - \cos(N_2) \sin 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2)) \\ &= -\sin(2 U' - 4(N_1) + 3(N_2)), \\ &\cos((N_2) - 2 U_2') \\ &= \cos(N_2) \cos 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2)) + \sin(N_2) \sin 2(U' - 2(N_1) + 2(N_2)) \\ &= \cos(2 U' - 4(N_1) + 3(N_2));\end{aligned}$$

also nach 126)

$$128) \operatorname{tang}(N_3) =$$

$$\frac{\sin(N_2) \cos(U' - 2(N_1) + 2(N_2))^2 + \frac{a^2}{e^2} \sin(2 U' - 4(N_1) + 3(N_2))}{\cos(N_2) \sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2))^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(2 U' - 4(N_1) + 3(N_2))}.$$

Aus den Formeln 79) erhält man nun ferner leicht

$$\sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N),$$

$$\sin(U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu} \sin(U_1' - (N_2));$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$\sin(U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu} \sin(U' - 2(N_1) + (N_2)).$$

Also hat man in dem Falle zweier Brechungen und einer Zurückwerfung zur Bestimmung von  $U_2'$  die folgenden Formeln:



$$129) \sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N),$$

$$\text{tang}(N_1) = - \frac{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin(N - 2U')}{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(N - 2U')},$$

$$\text{tang}(N_2) = - \frac{\sin(N_1) \cos(U' - 2(N_1))^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin(2U' - 3(N_1))}{\cos(N_1) \sin(U' - 2(N_1))^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(2U' - 3(N_1))},$$

$$\sin(U'_2 - (N_2)) = \frac{1}{\mu} \sin(U' - 2(N_1) + (N_2));$$

und zur Bestimmung von  $N$  aus  $X$  und  $Y$  hat man auch die Formel

$$130) \text{tang } N = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{Y}{X}$$

oder

$$131) \text{tang } N = \frac{a}{b} \left( \frac{Y}{b} : \frac{X}{a} \right).$$

Eben so erhält man aus den Formeln 80) leicht

$$\sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N),$$

$$\sin(U'_3 - (N_3)) = \frac{1}{\mu} \sin(U'_2 - (N_3));$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$\sin(U'_3 - (N_3)) = \frac{1}{\mu} \sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2) - (N_3)).$$

Folglich hat man in dem Falle zweier Brechungen und zweier Zurückwerfungen zur Bestimmung des Winkels  $U'_3$  die folgenden, den Formeln 129) ähnlichen Formeln:



$$132) \sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N),$$

$$\operatorname{tang}(N_1) = -\frac{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin(N - 2U')}{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(N - 2U')},$$

$$\operatorname{tang}(N_2) = -\frac{\sin(N_1) \cos(U' - 2(N_1))^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin(2U' - 3(N_1))}{\cos(N_1) \sin(U' - 2(N_1))^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(2U' - 3(N_1))},$$

$$\operatorname{tang}(N_3) = -\frac{\sin(N_2) \cos(U' - 2(N_1) + 2(N_2))^2 + \frac{a^2}{e^2} \sin(2U' - 4(N_1) + 3(N_2))}{\cos(N_2) \sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2))^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(2U' - 4(N_1) + 3(N_2))},$$

$$\sin(U'_3 - (N_3)) = \frac{1}{u} \sin(U' - 2(N_1) + 2(N_2) - (N_3));$$



zu denen dann wieder auch noch die Gleichung

$$133) \operatorname{tang} N = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{Y}{X}$$

oder

$$134) \operatorname{tang} N = \frac{a}{b} \left( \frac{Y}{b} : \frac{X}{a} \right)$$

hinzuzufügen ist.

So elegant die vorhergehenden Formeln auch sind, so muss doch bemerkt werden, dass sie nicht ganz bestimmte Kriterien an die Hand geben, wie die betreffenden Winkel zu nehmen sind, und dass man also in dieser Beziehung zu anderweitigen Beurtheilungen, was freilich in einzelnen Fällen meistens leicht sein wird, seine Zuflucht nehmen, oder wieder zu den Gleichungen 79) und 80), die auf alle Fragen ganz bestimmte Antwort ertheilen, zurückgehen muss.

#### §. 24.

Aus der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Gleichung

$$\operatorname{tang} (N_1) = - \frac{\sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin (N - 2 U')}{\cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos (N - 2 U')}$$

wollen wir jetzt den Differentialquotienten

$$\frac{\partial (N_1)}{\partial N}$$

entwickeln.

Zu dem Ende setzen wir der Kürze wegen

$$P = \sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin (N - 2 U'),$$

$$Q = \cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos (N - 2 U');$$

dann ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial P}{\partial N} = \cos N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \cos (N - 2 U')$$

$$- 2 \left\{ \sin N \sin U' \cos U' - \frac{a^2}{e^2} \cos (N - 2 U') \right\} \frac{\partial U'}{\partial N},$$



$$\frac{\partial Q}{\partial N} = - \sin N \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \sin(N - 2U') \\ + 2 \left\{ \cos N \sin U' \cos U' - \frac{b^2}{e^2} \sin(N - 2U') \right\} \frac{\partial U'}{\partial N}.$$

Also ist

$$Q \frac{\partial P}{\partial N} - P \frac{\partial Q}{\partial N} \\ = \left\{ \cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(N - 2U') \right\} \\ \times \left\{ \cos N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \cos(N - 2U') \right\} \\ + \left\{ \sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin(N - 2U') \right\} \\ \times \left\{ \sin N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2} \sin(N - 2U') \right\} \\ - 2 \left\{ \cos N \sin U'^2 - \frac{b^2}{e^2} \cos(N - 2U') \right\} \\ \times \left\{ \sin N \sin U' \cos U' - \frac{a^2}{e^2} \cos(N - 2U') \right\} \frac{\partial U'}{\partial N} \\ - 2 \left\{ \sin N \cos U'^2 - \frac{a^2}{e^2} \sin(N - 2U') \right\} \\ \times \left\{ \cos N \sin U' \cos U' - \frac{b^2}{e^2} \sin(N - 2U') \right\} \frac{\partial U'}{\partial N}.$$

Der von  $\frac{\partial U'}{\partial N}$  unabhängige Theil dieses Ausdruckes ist, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$\sin U'^2 \cos U'^2 - \left( \frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2 \right) \cos 2U' + \frac{a^2}{e^2} \cdot \frac{b^2}{e^2}.$$

Nun ist aber

$$e^4 \sin U'^2 \cos U'^2 - e^2 (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2) \cos 2U' + a^2 b^2 \\ = (a^4 - 2a^2 b^2 + b^4) \sin U'^2 \cos U'^2 - (a^2 - b^2) (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2) \cos 2U' + a^2 b^2 \\ = a^4 \sin U'^2 (\cos U'^2 - \cos 2U') \\ + b^4 \cos U'^2 (\sin U'^2 + \cos 2U') \\ - a^2 b^2 (2 \sin U'^2 \cos U'^2 + \cos U'^2 \cos 2U' - \sin U'^2 \cos 2U' - 1) \\ = a^4 \sin U'^4 + b^4 \cos U'^4 + a^2 b^2 (1 - \sin U'^4 - \cos U'^4) \\ = a^4 \sin U'^4 + b^4 \cos U'^4$$



$$+ a^2 b^2 \{ (\sin U'^2 + \cos U'^2)^2 - \sin U'^4 - \cos U'^4 \}$$

$$= a^4 \sin U'^4 + b^4 \cos U'^4 + 2 a^2 b^2 \sin U'^2 \cos U'^2$$

$$= (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2)^2,$$

und der obige von  $\frac{\partial U'}{\partial N}$  unabhängige Theil ist folglich

$$\left( \frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2 \right)^2.$$

Der Factor von  $-2 \frac{\partial U'}{\partial N}$  ist ferner, wie man leicht findet:

$$\frac{\sin N \cos N \sin U' \cos U'}{e^2} - \left( \frac{a^2}{e^2} \cos N \sin U' + \frac{b^2}{e^2} \sin N \cos U' \right) \sin (N - U') + \frac{a^2}{e^2} \cdot \frac{b^2}{e^2}.$$

Nun ist aber

$$\frac{e^4 \sin N \cos N \sin U' \cos U'}{e^2} - e^2 (a^2 \cos N \sin U' + b^2 \sin N \cos U') \sin (N - U') + a^2 b^2$$

$$= (a^4 - 2 a^2 b^2 + b^4) \sin N \cos N \sin U' \cos U'$$

$$- (a^2 - b^2) (a^2 \cos N \sin U' + b^2 \sin N \cos U') \sin (N - U') + a^2 b^2$$

$$= a^4 \cos N \sin U' \{ \sin N \cos U' - \sin (N - U') \}$$

$$+ b^4 \sin N \cos U' \{ \cos N \sin U' + \sin (N - U') \}$$

$$- a^2 b^2 \{ 2 \sin N \cos N \sin U' \cos U' + \sin (N - U')^2 - 1 \}$$

$$= a^4 \cos N^2 \sin U'^2 + b^4 \sin N^2 \cos U'^2$$

$$- a^2 b^2 (\sin N^2 \cos U'^2 + \cos N^2 \sin U'^2 - 1)$$

$$= a^4 \cos N^2 \sin U'^2 + b^4 \sin N^2 \cos U'^2$$

$$+ a^2 b^2 (\sin N^2 \sin U'^2 + \cos N^2 \cos U'^2)$$

$$= (a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2) (a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2),$$

und der obige Factor von  $-2 \frac{\partial U'}{\partial N}$  ist folglich

$$\left( \frac{a^2}{e^2} \cos N^2 + \frac{b^2}{e^2} \sin N^2 \right) \left( \frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2 \right).$$

Daher ist jetzt

$$Q \frac{\partial P}{\partial N} - P \frac{\partial Q}{\partial N}$$

$$= \left( \frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2 \right)^2$$

$$- 2 \left( \frac{a^2}{e^2} \cos N^2 + \frac{b^2}{e^2} \sin N^2 \right) \left( \frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2 \right) \frac{\partial U'}{\partial N}.$$



Weil nun nach dem Obigen

$$\operatorname{tang}(N_1) = - \frac{P}{Q}$$

ist, so ist

$$\sec(N_1)^2 \frac{\partial(N_1)}{\partial N} = - \frac{Q \frac{\partial P}{\partial N} - P \frac{\partial Q}{\partial N}}{Q^2},$$

und folglich, weil

$$\sec(N_1)^2 = \frac{P^2 + Q^2}{Q^2}$$

ist,

$$\frac{\partial(N_1)}{\partial N} = - \frac{Q \frac{\partial P}{\partial N} - P \frac{\partial Q}{\partial N}}{P^2 + Q^2}.$$

Es ist aber auch

$$\frac{\cos(N_1)^2}{Q^2} = \frac{\sin(N_1)^2}{P^2},$$

und daher nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N_1)}{\partial N} &= - \frac{\cos(N_1)^2}{Q^2} \left( Q \frac{\partial P}{\partial N} - P \frac{\partial Q}{\partial N} \right) \\ &= - \frac{\sin(N_1)^2}{P^2} \left( Q \frac{\partial P}{\partial N} - P \frac{\partial Q}{\partial N} \right); \end{aligned}$$

folglich, weil, wie man leicht findet,

$$Q = \cos N \left( \frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2 \right) - 2 \frac{b^2}{e^2} \cos(N - U') \cos U',$$

$$P = - \sin N \left( \frac{a^2}{e^2} \sin U'^2 + \frac{b^2}{e^2} \cos U'^2 \right) - 2 \frac{a^2}{e^2} \cos(N - U') \sin U'$$

ist:

$$\begin{aligned} 135) \quad \frac{\partial(N_1)}{\partial N} &= - \left\{ \frac{\cos(N_1)}{\cos N - \frac{2b^2 \cos(N - U') \cos U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2}} \right\}^2 \\ &\quad \times \left\{ 1 - 2 \frac{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \cdot \frac{\partial U'}{\partial N} \right\} \\ &= - \left\{ \frac{\sin(N_1)}{\sin N - \frac{2a^2 \cos(N - U') \sin U'}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2}} \right\}^2 \\ &\quad \times \left\{ 1 - 2 \frac{a^2 \cos N^2 + b^2 \sin N^2}{a^2 \sin U'^2 + b^2 \cos U'^2} \cdot \frac{\partial U'}{\partial N} \right\} \end{aligned}$$



oder

$$\begin{aligned}
 136) \quad \frac{\partial(N_1)}{\partial N} &= - \left\{ \frac{\cos(N_1)}{\cos N - \frac{2 \cos(N - U') \cos U'}{\cos U'^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin U'^2}} \right\}^2 \\
 &\times \left\{ 1 - 2 \frac{\sin N^2 + \frac{a^2}{b^2} \cos N^2}{\cos U'^2 + \frac{a^2}{b^2} \sin U'^2} \cdot \frac{\partial U'}{\partial N} \right\} \\
 &= - \left\{ \frac{\sin(N_1)}{\sin N - \frac{2 \cos(N - U') \sin U'}{\sin U'^2 + \frac{b^2}{a^2} \cos U'^2}} \right\}^2 \\
 &\times \left\{ 1 - 2 \frac{\cos N^2 + \frac{b^2}{a^2} \sin N^2}{\sin U'^2 + \frac{b^2}{a^2} \cos U'^2} \cdot \frac{\partial U'}{\partial N} \right\},
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 137) \quad \frac{\partial(N_1)}{\partial N} &= - \left\{ \frac{\cos(N_1)}{\cos N - \frac{2 \cos(N - U') \cos U'}{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \sin U'^2}} \right\}^2 \\
 &\times \left\{ 1 - 2 \frac{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cos N^2}{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \sin U'^2} \cdot \frac{\partial U'}{\partial N} \right\} \\
 &= - \left\{ \frac{\sin(N_1)}{\sin N - \frac{2 \cos(N - U') \sin U'}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos U'^2}} \right\}^2 \\
 &\times \left\{ 1 - 2 \frac{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin N^2}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos U'^2} \cdot \frac{\partial U'}{\partial N} \right\}.
 \end{aligned}$$

Weil aber, wie man leicht findet,



$$\cos N - 2 \cos(N - U') \cos U' = - \cos(N - 2U'),$$

$$\sin N - 2 \cos(N - U') \sin U' = \sin(N - 2U')$$

ist, so ist auch:

$$138) \frac{\partial(N_1)}{\partial N} = - \left\{ \frac{\cos(N_1)}{\cos(N - 2U') + \frac{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cos(N - U') \sin U' \sin 2U'}{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \sin^2 U'}} \right\}^2$$

$$\times \left\{ 1 - 2 \frac{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cos N^2}{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \sin^2 U'} \cdot \frac{\partial U'}{\partial N} \right\}$$

$$= - \left\{ \frac{\sin(N_1)}{\sin(N - 2U') - \frac{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos(N - U') \cos U' \sin 2U'}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 U'}} \right\}^2$$

$$\times \left\{ 1 - 2 \frac{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin N^2}{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 U'} \cdot \frac{\partial U'}{\partial N} \right\}.$$

Der Kürze wegen wollen wir im Folgenden

$$139) \frac{\partial(N_1)}{\partial N} = F\left\{N, (N_1), U', \frac{\partial U'}{\partial N}\right\}$$

setzen, wo die Bedeutung von

$$F\left\{N, (N_1), U', \frac{\partial U'}{\partial N}\right\}$$

aus dem Vorhergehenden leicht von selbst erhellen wird; dann ist nach 125) und 126)

$$140) \frac{\partial(N_2)}{\partial(N_1)} = F\left\{(N_1), (N_2), U'_1, \frac{\partial U'_1}{\partial(N_1)}\right\}$$

und

$$141) \frac{\partial(N_3)}{\partial(N_2)} = F\left\{(N_2), (N_3), U'_2, \frac{\partial U'_2}{\partial(N_2)}\right\}.$$



§. 25.

In dem Falle zweier Brechungen und einer Zurückwerfung folgt aus den aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N); \\ \cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)), \\ \sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1)); \\ \sin(U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu} \sin(U_1' - (N_2)) \end{array} \right.$$

leicht durch Differentiation:

$$\frac{\partial U'}{\partial N} = 1 + \mu \frac{\cos(U - N)}{\cos(U' - N)};$$

ferner

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = \frac{\sin(U' - 2(N_1))}{\sin U_1'} \left( 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)} \right) \\ = -\frac{\cos(U' - 2(N_1))}{\cos U_1'} \left( 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)} \right), \end{array} \right.$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)};$$

und

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} = \frac{\partial (N_2)}{\partial N} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\cos(U_1' - (N_2))}{\cos(U_2' - (N_2))} \left( \frac{\partial U_1'}{\partial N} - \frac{\partial (N_2)}{\partial N} \right);$$

und man hat also jetzt die folgenden Formeln:

$$142) \sin(U' - N) = -\mu \sin(U - N),$$

$$\frac{\partial U'}{\partial N} = 1 + \mu \frac{\cos(U - N)}{\cos(U' - N)},$$

$$\frac{\partial (N_1)}{\partial N} = F \left\{ N, (N_1), U, \frac{\partial U'}{\partial N} \right\},$$

$$\frac{\partial U'}{\partial (N_1)} = \frac{\partial U'}{\partial N} \cdot \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$

$$\cos U_1' = -\cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)},$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial N} = \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} \cdot \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$



$$\frac{\partial (N_2)}{\partial (N_1)} = F \left\{ (N_1), (N_2), U_1', \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} \right\}$$

$$\frac{\partial (N_2)}{\partial N} = \frac{\partial (N_2)}{\partial (N_1)} \cdot \frac{\partial (N_1)}{\partial N},$$

$$\sin (U_2' - (N_2)) = \frac{1}{\mu} \sin (U_1' - (N_2)),$$

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} = \frac{\partial (N_2)}{\partial N} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\cos (U_1' - (N_2))}{\cos (U_2' - (N_2))} \left( \frac{\partial U_1'}{\partial N} - \frac{\partial (N_2)}{\partial N} \right).$$

Mittelst dieser Formeln, in Verbindung mit den Formeln 129), kann man den Differentialquotienten

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N}$$

berechnen, wenn  $U$  und  $N$  als gegeben angesehen werden.

§. 26.

In dem Falle zweier Brechungen und zweier Zurückwerfungen folgt aus den aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$\sin (U' - N) = - \mu \sin (U - N);$$

$$\cos U_1' = - \cos (U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin (U' - 2(N_1));$$

$$\cos U_2' = - \cos (U_1' - 2(N_2)),$$

$$\sin U_2' = \sin (U_1' - 2(N_2));$$

$$\sin (U_3' - (N_3)) = \frac{1}{\mu} \sin (U_2' - (N_3))$$

leicht durch Differentiation:

$$\frac{\partial U'}{\partial N} = 1 + \mu \frac{\cos (U - N)}{\cos (U' - N)};$$

ferner:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} &= \frac{\sin (U' - 2(N_1))}{\sin U_1'} \left( 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)} \right) \\ &= - \frac{\cos (U' - 2(N_1))}{\cos U_1'} \left( 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)} \right), \end{aligned}$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U_1'}{\partial (N_1)} = 2 - \frac{\partial U'}{\partial (N_1)};$$

ferner



$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2'}{\partial(N_2)} &= \frac{\sin(U_1' - 2(N_2))}{\sin U_2'} \left(2 - \frac{\partial U_1'}{\partial(N_2)}\right) \\ &= - \frac{\cos(U_1' - 2(N_2))}{\cos U_2'} \left(2 - \frac{\partial U_1'}{\partial(N_2)}\right),\end{aligned}$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\text{endlich} \quad \frac{\partial U_2'}{\partial(N_2)} = 2 - \frac{\partial U_1'}{\partial(N_2)},$$

$$\frac{\partial U_3'}{\partial N} = \frac{\partial(N_3)}{\partial N} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\cos(U_2' - (N_3))}{\cos(U_3' - (N_3))} \left(\frac{\partial U_2'}{\partial N} - \frac{\partial(N_3)}{\partial N}\right);$$

und man hat also jetzt die folgenden Formeln:

$$143) \sin(U' - N) = - \mu \sin(U - N),$$

$$\frac{\partial U'}{\partial N} = 1 + \mu \frac{\cos(U - N)}{\cos(U' - N)},$$

$$\frac{\partial(N_1)}{\partial N} = F\left\{N, (N_1), U', \frac{\partial U'}{\partial N}\right\},$$

$$\frac{\partial U'}{\partial(N_1)} = \frac{\partial U'}{\partial N} \cdot \frac{\partial(N_1)}{\partial N},$$

$$\cos U_1' = - \cos(U' - 2(N_1)),$$

$$\sin U_1' = \sin(U' - 2(N_1));$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial(N_1)} = 2 - \frac{\partial U'}{\partial(N_1)},$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial N} = \frac{\partial U_1'}{\partial(N_1)} \cdot \frac{\partial(N_1)}{\partial N},$$

$$\frac{\partial(N_2)}{\partial(N_1)} = F\left\{(N_1), (N_2), U_1', \frac{\partial U_1'}{\partial(N_1)}\right\},$$

$$\frac{\partial(N_2)}{\partial N} = \frac{\partial(N_2)}{\partial(N_1)} \cdot \frac{\partial(N_1)}{\partial N},$$

$$\frac{\partial U_1'}{\partial(N_2)} = \frac{\partial U_1'}{\partial(N_1)} \cdot \frac{\partial(N_1)}{\partial(N_2)},$$

$$\cos U_2' = - \cos(U_1' - 2(N_2)),$$

$$\sin U_2' = \sin(U_1' - 2(N_2));$$



$$\frac{\partial U_2'}{\partial(N_2)} = 2 - \frac{\partial U_1'}{\partial(N_2)},$$

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} = \frac{\partial U_2'}{\partial(N_2)} \cdot \frac{\partial(N_2)}{\partial N},$$

$$\frac{\partial(N_3)}{\partial(N_2)} = F \left\{ (N_2), (N_3), U_2', \frac{\partial U_2'}{\partial(N_2)} \right\},$$

$$\frac{\partial(N_3)}{\partial N} = \frac{\partial(N_3)}{\partial(N_2)} \cdot \frac{\partial(N_2)}{\partial N},$$

$$\sin(U_3' - (N_3)) = \frac{1}{\mu} \sin(U_2' - (N_3)),$$

$$\frac{\partial U_3'}{\partial N} = \frac{\partial(N_3)}{\partial N} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\cos(U_2' - (N_3))}{\cos(U_3' - (N_3))} \left( \frac{\partial U_2'}{\partial N} - \frac{\partial(N_3)}{\partial N} \right).$$

Mittelst dieser Formeln, in Verbindung mit den Formeln 132), kann man den Differentialquotienten

$$\frac{\partial U_3'}{\partial N}$$

berechnen, wenn  $U$  und  $N$  gegeben sind.

## §. 27.

Will man für einen bestimmten Werth von  $\frac{a}{b}$  oder  $\frac{b}{a}$  und einen gegebenen Werth des Winkels  $U$  den Winkel  $N$  so bestimmen, dass der Differentialquotient

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} \text{ oder } \frac{\partial U_3'}{\partial N}$$

verschwindet, so muss man dazu, weil eine vollständige analytische Auflösung dieses Problems in sehr weitläufige Entwicklungen führen würde, mittelst der in den beiden vorhergehenden Paragraphen und in §. 23. gegebenen Formeln durch Annäherungen zu gelangen suchen, indem man für  $N$  nach und nach verschiedene Werthe setzt, und die entsprechenden Werthe von

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} \text{ oder } \frac{\partial U_3'}{\partial N}$$

berechnet, wozu eine ausführliche Anleitung nicht erforderlich sein wird. Hat man aber auf diesem Wege, der im vorliegenden Falle, besonders wenn  $\frac{a}{b}$  oder  $\frac{b}{a}$  der Einheit sehr nahe kommt, immer leicht-



ter zum Ziele führen wird, als die allgemeine sehr weitläufige und verwickelte Auflösung, den Winkel  $N$  gefunden, so erhält man die Coordinaten  $X, Y$  des Punktes  $(XY)$  der Ellipse, in welchem der Differentialquotient

$$\frac{\partial U_2'}{\partial N} \text{ oder } \frac{\partial U_3'}{\partial N}$$

verschwindet, mittelst der folgenden aus §. 23. bekannten Formeln:

$$144) \quad \begin{cases} \frac{X}{a} = \frac{\cos N}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 N}}, \\ \frac{Y}{b} = \frac{\sin N}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \cos^2 N}}; \end{cases}$$

die man auch leicht noch unter andern Formen darstellen kann, worüber §. 23. zu vergleichen ist.

#### §. 28.

Nachdem wir jetzt bei dem Kreise und bei der Ellipse die Fälle besonders betrachtet haben, welche für die wirkliche Anwendung von Bedeutung sind, wollen wir nun wieder zu dem Kreise zurückkehren, und ganz allgemeine Ausdrücke für den Fall von zwei Brechungen und überhaupt  $n - 1$  Zurückwerfungen entwickeln, eine Untersuchung, welche wenigstens in theoretischer Rücksicht interessant ist, und uns zu bemerkenswerthen allgemeinen Formeln führen wird.

Die in §. 16. angestellte Untersuchung, welche sich leicht zu völliger Allgemeinheit erheben lässt, führt auf der Stelle zu den folgenden für zwei Brechungen und  $n - 1$  Zurückwerfungen geltenden allgemeinen Ausdrücken:

$$(-1)^n X_n = \cos((2n - 1)N - 2nU'),$$

$$(-1)^n Y_n = - \sin((2n - 1)N - 2nU');$$

$$(-1)^n \cos U'_n = - \frac{1}{\mu} \sin((2n - 1)N - 2nU') \sin(N - U')$$

$$+ \cos((2n - 1)N - 2nU') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(N - U')},$$



$$(-1)^n \sin U'_n = -\frac{1}{\mu} \cos((2n-1)N - 2nU') \sin(N-U') \\ - \sin((2n-1)N - 2nU') \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N-U')^2}.$$

Differentiirt man nun die letzte Gleichung in Bezug auf  $N$  als unabhängige veränderliche Grösse, so erhält man nach leichter Rechnung

$$(-1)^n \cos U'_n \frac{\partial U'_n}{\partial N} = -(-1)^n \cos U'_n \cdot (2n-1 - 2n \frac{\partial U'}{\partial N}) \\ - (-1)^n \cdot \frac{1}{\mu} \cos U'_n \cos(N-U') \frac{1 - \frac{\partial U'}{\partial N}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N-U')^2}},$$

also

$$\frac{\partial U'_n}{\partial N} = - (2n-1 - 2n \frac{\partial U'}{\partial N}) - \frac{\frac{1}{\mu} \cos(N-U')}{\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N-U')^2}} \left(1 - \frac{\partial U'}{\partial N}\right).$$

Weil nun aber nach §. 16. bekanntlich

$$\sin(N-U') = -\mu \sin N$$

ist, so ist

$$\cos(N-U') \left(1 - \frac{\partial U'}{\partial N}\right) = -\mu \cos N;$$

und, weil man den obigen Ausdruck von

$$\frac{\partial U'_n}{\partial N}$$

auch auf folgende Form bringen kann:

$$\frac{\partial U'_n}{\partial N}$$

$$= 1 - \left\{ 2n + \frac{\frac{1}{\mu} \cos(N-U')}{\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N-U')^2}} \right\} \left(1 - \frac{\partial U'}{\partial N}\right),$$



so erhält man aus dem Vorhergehenden unmittelbar:

$$\frac{\partial U'_n}{\partial N} = 1 + \frac{\mu \cos N}{\cos(N-U')} \left\{ 2n + \frac{\frac{1}{\mu} \cos(N-U')}{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N-U')^2} \right\}.$$

Weil nun bekanntlich nach §. 16.

$$\cos N = X, \sin N = Y;$$

$$\cos(N-U') = -\sqrt{1-\mu^2 Y^2}, \sin(N-U') = -\mu Y;$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin(N-U')^2} = X$$

und also

$$-\sin N \frac{\partial N}{\partial X} = 1, \frac{\partial N}{\partial X} = -\frac{1}{Y}$$

ist, so ist noch dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial U'_n}{\partial X} = \frac{\partial U'_n}{\partial N} \cdot \frac{\partial N}{\partial X} = -\frac{1}{Y} + \frac{\mu X}{Y \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \left\{ 2n - \frac{\sqrt{1-\mu^2 Y^2}}{\mu X} \right\},$$

also

$$145) \frac{\partial U'_n}{\partial X} = \frac{2(n\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2})}{Y \sqrt{1-\mu^2 Y^2}}.$$

Für  $n=2$  und  $n=3$  erhält man aus dieser allgemeinen Formel die Formeln 88) und 89), wie es sein muss.

Um nun auch noch den zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U'_n}{\partial X^2}$$

zu entwickeln, bringen wir den Ausdruck 145) auf die Form

$$\frac{\partial U'_n}{\partial X} = -\frac{2}{Y} + \frac{2n\mu X}{Y \sqrt{1-\mu^2 Y^2}};$$

so ist, wenn man differentiirt:



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2} &= \frac{2}{Y^2} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} - \frac{2n\mu X}{Y^2 \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} \\
 &\quad + \frac{2n\mu}{Y} \cdot \frac{1-\mu^2 Y^2 + \mu^2 XY \frac{\partial Y}{\partial X}}{(1-\mu^2 Y^2) \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \\
 &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{2n\mu X^2}{Y^3 \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} + \frac{2n\mu(1-\mu^2)}{Y(1-\mu^2 Y^2) \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \\
 &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{2n\mu(X^2 + Y^2) - 2n\mu^3 Y^2(1+X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2) \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \\
 &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{2n\mu - 2n\mu^3(1-X^2)(1+X^2)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2) \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \\
 &= -\frac{2X}{Y^3} + \frac{2n\mu - 2n\mu^3(1-X^4)}{Y^3(1-\mu^2 Y^2) \sqrt{1-\mu^2 Y^2}},
 \end{aligned}$$

also

$$146) \quad \frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3} \left\{ X - \frac{n\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2) \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \right\}.$$

Für  $n = 2$  und  $n = 3$  erhält man die Formeln 90) und 91), wie es sein muss.

Setzen wir nun auf ähnliche Art wie früher

$$\frac{\partial U_n'}{\partial X} = \frac{2(n\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2})}{Y \sqrt{1-\mu^2 Y^2}} = 0,$$

so erhalten wir die Gleichung

$$n\mu X - \sqrt{1-\mu^2 Y^2} = 0$$

oder

$$n\mu X = \sqrt{1-\mu^2 Y^2},$$

durch deren Auflösung sich in Verbindung mit der Gleichung

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

wenn man beachtet, dass  $X$  unter den gemachten Voraussetzungen bekanntlich positiv ist, ohne Schwierigkeit

$$147) \quad \begin{cases} X = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{(1-\mu)(1+\mu)}{n^2-1}} \\ Y = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{n^2\mu^2-1}{n^2-1}} = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{(n\mu-1)(n\mu+1)}{n^2-1}} \end{cases}$$

ergibt.



Berechnen wir den diesen Werthen von  $X$  und  $Y$  entsprechenden Werth des zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2} = -\frac{2}{Y^3} \left\{ X - \frac{n\mu(1-\mu^2(1-X^4))}{(1-\mu^2 Y^2)\sqrt{1-\mu^2 Y^2}} \right\},$$

so erhalten wir nach leichter Rechnung für die obigen Werthe von  $X$  und  $Y$  mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$(148) \quad \frac{\partial^2 U_n'}{\partial X^2} = + \frac{2(n^2-1)^2 \mu^2}{n^2 \sqrt{(1-\mu^2)(n^2 \mu^2-1)}}.$$

Aus den obigen Ausdrücken von  $X$  und  $Y$  ergibt sich auf der Stelle, dass unser Problem nur unter der Voraussetzung möglich ist, dass

$$\mu = M\left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

ist. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so ist  $U_n'$  ein Minimum oder ein Maximum, jenachdem man in dem obigen Ausdrucke von  $Y$  das obere oder das untere Zeichen nimmt.

Für den Uebergang eines Strahls aus Luft in Wasser ist  $\mu = 0,749$ . Nun ist  $1/2 = 0,5$ , und daher für  $n \geq 2$  offenbar immer

$$\mu = M\left(\frac{1}{n}, 1\right),$$

also für jedes  $n \geq 2$  die Aufgabe in diesem Falle möglich

Nach dem Obigen ist nun

$$(149) \quad \begin{cases} \cos N = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{(1-\mu)(1+\mu)}{n^2-1}}, \\ \sin N = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{n^2 \mu^2-1}{n^2-1}} = \pm \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{(n\mu-1)(n\mu+1)}{n^2-1}}, \\ \cos(N-U') = -n \sqrt{\frac{1-\mu^2}{n^2-1}} = -n \sqrt{\frac{(1-\mu)(1+\mu)}{n^2-1}}, \\ \sin(N-U') = \mp \sqrt{\frac{n^2 \mu^2-1}{n^2-1}} = \mp \sqrt{\frac{(n\mu-1)(n\mu+1)}{n^2-1}}; \end{cases}$$

und die obigen Formeln zur Bestimmung der Lage des letzten ge-



brochenen Strahls können auf den folgenden Ausdruck gebracht werden:

$$(-1)^n X_n = \cos \{ N - 2n(N - U') \},$$

$$(-1)^n Y_n = \sin \{ N - 2n(N - U') \};$$

$$(-1)^n \cos U_n' = \frac{1}{\mu} \sin \{ N - 2n(N - U') \} \sin(N - U')$$

$$+ \cos \{ N - 2n(N - U') \} \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(N - U')},$$

$$(-1)^n \sin U_n' = -\frac{1}{\mu} \cos \{ N - 2n(N - U') \} \sin(N - U')$$

$$+ \sin \{ N - 2n(N - U') \} \sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(N - U')^2}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$\sin(N - U') = -\mu \sin N,$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\mu^2} \sin^2(N - U')} = \cos N;$$

folglich

$$(-1)^n \cos U_n' = -\sin \{ N - 2n(N - U') \} \sin N$$

$$+ \cos \{ N - 2n(N - U') \} \cos N,$$

$$(-1)^n \sin U_n' = \cos \{ N - 2n(N - U') \} \sin N$$

$$+ \sin \{ N - 2n(N - U') \} \cos N;$$

d. i.

$$(-1)^n \cos U_n' = \cos 2 \{ N - n(N - U') \},$$

$$(-1)^n \sin U_n' = \sin 2 \{ N - n(N - U') \};$$

und die Formeln zur Bestimmung der Lage des letzten gebrochenen Strahls sind folglich:

$$150) \begin{cases} (-1)^n X_n = \cos \{ N - 2n(N - U') \}, \\ (-1)^n Y_n = \sin \{ N - 2n(N - U') \}; \\ (-1)^n \cos U_n' = \cos 2 \{ N - n(N - U') \}, \\ (-1)^n \sin U_n' = \sin 2 \{ N - n(N - U') \}. \end{cases}$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$M = 2(N - U'),$$

so ist bekanntlich



$$\begin{aligned}
&= \cos M^n \{ 1 - n_2 \tan M^2 + n_4 \tan M^4 - n_6 \tan M^6 + \dots \}, \\
&= \cos M^n \{ n_1 \tan M - n_3 \tan M^3 + n_5 \tan M^5 - \dots \};
\end{aligned}$$

wo

$$n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, \dots$$

wie gewöhnlich die Binomialcoefficienten für den Exponenten  $n$  bezeichnen. Also ist nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned}
&(-1)^n X_n \\
&= \cos N \cos 2n(N - U') + \sin N \sin 2n(N - U') \\
&= \cos M^n \left\{ \begin{aligned} &\cos N + n_1 \sin N \tan M \\ &- n_2 \cos N \tan M^2 \\ &- n_3 \sin N \tan M^3 \\ &+ n_4 \cos N \tan M^4 \\ &+ n_5 \sin N \tan M^5 \\ &- \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&(-1)^n Y_n \\
&= \sin N \cos 2n(N - U') - \cos N \sin 2n(N - U') \\
&= \cos M^n \left\{ \begin{aligned} &\sin N - n_1 \cos N \tan M \\ &- n_2 \sin N \tan M^2 \\ &+ n_3 \cos N \tan M^3 \\ &+ n_4 \sin N \tan M^4 \\ &- n_5 \cos N \tan M^5 \\ &- n_6 \sin N \tan M^6 \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\},
\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \cos U_n' \\
&= \cos 2N \cos 2(N - U') + \sin 2N \sin 2(N - U') \\
&= \cos M^n \left\{ \begin{aligned} &\cos 2N + n_1 \sin 2N \tan M \\ &- n_2 \cos 2N \tan M^2 \\ &- n_3 \sin 2N \tan M^3 \\ &+ n_4 \cos 2N \tan M^4 \\ &+ n_5 \sin 2N \tan M^5 \\ &- \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

und



$$\begin{aligned}
 & (-1)^n \sin U_n' \\
 &= \sin 2N \cos 2(N - U') - \cos 2N \sin 2(N - U') \\
 &= \cos M^n \left\{ \begin{aligned} & \sin 2N - n_1 \cos 2N \tan M \\ & - n_2 \sin 2N \tan M^2 \\ & + n_3 \cos 2N \tan M^3 \\ & + n_4 \sin 2N \tan M^4 \\ & - n_5 \cos 2N \tan M^5 \\ & - n_6 \sin 2N \tan M^6 \\ & + \dots \\ & + \dots \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\cos 2N = \cos N^2 - \sin N^2 = \frac{2 - (n^2 + 1)\mu^2}{(n^2 - 1)\mu^2},$$

$$\sin 2N = 2 \sin N \cos N = \pm \frac{2\sqrt{(1 - \mu^2)(n^2\mu^2 - 1)}}{(n^2 - 1)\mu^2};$$

$$\cos M = \cos(N - U')^2 - \sin(N - U')^2 = \frac{n^2 + 1 - 2n^2\mu^2}{n^2 - 1},$$

$$\sin M = 2 \sin(N - U') \cos(N - U') = \pm \frac{2n\sqrt{(1 - \mu^2)(n^2\mu^2 - 1)}}{n^2 - 1};$$

folglich

$$\tan M = \pm \frac{2n\sqrt{(1 - \mu^2)(n^2\mu^2 - 1)}}{n^2 + 1 - 2n^2\mu^2}.$$

Führt man nun diese Ausdrücke in die oben für

$(-1)^n X_n$ ,  $(-1)^n Y_n$  und  $(-1)^n \cos U_n'$ ,  $(-1)^n \sin U'$  gefundenen Ausdrücke ein, so erhält man:



$$\begin{aligned}
 (-1)^n X_n = & \left( \frac{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2}{n^2 - 1} \right)^n \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{n^2 - 1}} + \frac{n_1}{\mu} \sqrt{\frac{n^2 \mu^2 - 1}{n^2 - 1}} \cdot \frac{2n \mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2} \right. \\
 & - \frac{n_2}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{n^2 - 1}} \cdot \frac{2^2 n^2 (1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^2} \\
 & - \frac{n_3}{\mu} \sqrt{\frac{n^2 \mu^2 - 1}{n^2 - 1}} \cdot \frac{2^3 n^3 (1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1) \mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^3} \\
 & + \frac{n_4}{\mu} \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{n^2 - 1}} \cdot \frac{2^4 n^4 (1 - \mu^2)^2 (n^2 \mu^2 - 1)^2}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^4} \\
 & + \frac{n_5}{\mu} \sqrt{\frac{n^2 \mu^2 - 1}{n^2 - 1}} \cdot \frac{2^5 n^5 (1 - \mu^2)^2 (n^2 \mu^2 - 1)^2 \mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^5} \\
 & - \dots \\
 & - \dots
 \end{aligned}$$

folglich



d. i.

$$151) (-1)^n X_n = \left( \frac{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2}{n^2 - 1} \right)^n \cdot \left\{ 1 + n_1 \cdot \frac{2n(n^2 \mu^2 - 1)}{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2} \right.$$

$$- n_2 \cdot \frac{2^2 n^2 (1 - \mu^2) (n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^2} \Bigg\}$$

$$- n_3 \cdot \frac{2^3 n^3 (1 - \mu^2) (n^2 \mu^2 - 1)^2}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^3} +$$

$$+ n_4 \cdot \frac{2^4 n^4 (1 - \mu^2)^2 (n^2 \mu^2 - 1)^2}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^4} +$$

$$+ n_5 \cdot \frac{2^5 n^5 (1 - \mu^2)^2 (n^2 \mu^2 - 1)^3}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^5} -$$

$$- n_6 \cdot \frac{2^6 n^6 (1 - \mu^2)^3 (n^2 \mu^2 - 1)^3}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^6} \Bigg\}$$

7\*

$$(-1)^n X_n = \left( \frac{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2}{n^2 - 1} \right)^n \cdot \left\{ 1 + n_1 \cdot \frac{2n(n^2 \mu^2 - 1)}{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2} \right.$$

unq







d. i.

$$\begin{aligned}
 152) \quad (-1)^n Y_n = & \pm \left( \frac{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2}{n^2 - 1} \right)^n \cdot \left\{ 1 - n_1 \cdot \frac{2n(1 - \mu^2)}{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2} \right. \\
 & - n_2 \cdot \frac{2^2 n^2 (1 - \mu^2) (n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^2} \\
 & + n_3 \cdot \frac{2^3 n^3 (1 - \mu^2)^2 (n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^3} \\
 & + n_4 \cdot \frac{2^4 n^4 (1 - \mu^2)^2 (n^2 \mu^2 - 1)^2}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^4} \\
 & - n_5 \cdot \frac{2^5 n^5 (1 - \mu^2)^3 (n^2 \mu^2 - 1)^2}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^5} \\
 & - n_6 \cdot \frac{2^6 n^6 (1 - \mu^2)^3 (n^2 \mu^2 - 1)^3}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^6} \\
 & + \dots \dots \dots \left. \right\} \cdot \sqrt{\frac{n^2 \mu^2 - 1}{n^2 - 1}};
 \end{aligned}$$



ferner

$$\begin{aligned}
 (-1)^n \cos U'_n = & \left( \frac{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2}{n^2 - 1} \right)^n \cdot \left\{ \frac{2 - (n^2 + 1)\mu^2}{(n^2 - 1)\mu^2} + n_1 \cdot \frac{2\mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 - 1)\mu^2} \cdot \frac{2n\mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2} \right. \\
 & - n_2 \cdot \frac{2 - (n^2 + 1)\mu^2}{(n^2 - 1)\mu^2} \cdot \frac{2^2 n^2 (1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^2} \\
 & - n_3 \cdot \frac{2\mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 - 1)\mu^2} \cdot \frac{2^3 n^3 (1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)\mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^3} \\
 & + n_4 \cdot \frac{2 - (n^2 + 1)\mu^2}{(n^2 - 1)\mu^2} \cdot \frac{2^4 n^4 (1 - \mu^2)^2 (n^2 \mu^2 - 1)^2}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^4} \\
 & + n_5 \cdot \frac{2\mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 - 1)\mu^2} \cdot \frac{2^5 n^5 (1 - \mu^2)^2 (n^2 \mu^2 - 1)^2 \mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^5} \\
 & - \dots \dots \dots \frac{2^6 n^6 (1 - \mu^2)^3 (n^2 \mu^2 - 1)^3 \mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^6} \dots \dots \dots \\
 & - \dots \dots \dots \frac{2^7 n^7 (1 - \mu^2)^4 (n^2 \mu^2 - 1)^4 \mathcal{V}(1 - \mu^2)(n^2 \mu^2 - 1)}{(n^2 + 1 - 2n^2 \mu^2)^7} \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

q' r



d. i.

$$153) \quad (-1) \cos U_n' = \frac{(n^2+1-2n^2\mu^2)^n}{(n^2-1)^{n+1}\mu^2} \left\{ 2 - (n^2+1)\mu^2 + n_1 \cdot \frac{2^2 n(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{n^2+1-2n^2\mu^2} \right.$$

$$- n_2(2 - (n^2+1)\mu^2) \cdot \frac{2^2 n^2(1-\mu^2)(n^2\mu^2-1)}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^2}$$

$$- n_3 \cdot \frac{2^4 n^3(1-\mu^2)^2(n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^3}$$

$$+ n_4(2 - (n^2+1)\mu^2) \cdot \frac{2^4 n^4(1-\mu^2)^2(n^2\mu^2-1)^2}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^4}$$

$$+ n_5 \cdot \frac{2^6 n^5(1-\mu^2)^3(n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^5}$$

$$- n_6(2 - (n^2+1)\mu^2) \cdot \frac{2^6 n^6(1-\mu^2)^3(n^2\mu^2-1)^3}{(n^2+1-2n^2\mu^2)^6} -$$

$$\frac{(n^2-1)n_7}{(n^2+1-3n^2\mu^2)} + \frac{(n^2-1)n_8}{(1-n^2)(n^2\mu^2-1)} + \dots + \frac{(n^2-1)n_9}{(n^2+1-3n^2\mu^2)} + \dots + \frac{(n^2-1)n_{10}}{(1-n^2)(n^2\mu^2-1)} + \dots$$



$$(123) \quad (-1)^{\text{cor } \Pi^a} = \frac{(n_3 - 1)_{s+1} w_2}{(n_3 + 1 - 3n_3 w_3)_s} \left\{ 5 - (n_3 + 1) w_3 + \frac{n_3 + 1 - 3n_3 w_3}{5 \cdot n(1 - w_3) \cdot (n_3 w_3 - 1} \right.$$







§. 29.

Wie man aus der in §. 5. und §. 6. entwickelten, aus einem mehr geometrischen Gesichtspunkte dargestellten Theorie der wirksamen Strahlen die HAUPTERSCHEINUNGEN des Regenbogens sämmtlich durch sehr einfache geometrische Betrachtungen herleiten und auf völlig genügende Weise erklären kann, darf ich hier als hinreichend bekannt voraussetzen, und ich müsste fürchten, die Geduld der Leser zu sehr in Anspruch zu nehmen, wenn ich diese seit Newton's Zeit schon so oft in völlig gleicher Weise angestellten Betrachtungen hier wiederholen wollte. Dagegen wird es nicht überflüssig sein, die Theorie des Regenbogens in ihren Grundzügen auf analytischem Wege aus der im Obigen entwickelten analytischen Theorie der wirksamen Strahlen herzuleiten, wozu wir jetzt, den Fall des Kreises oder sphärischer Tropfen in's Auge fassend, übergehen wollen.

Zu dem Ende legen wir durch das Auge des Beobachters eine den nach parallelen geraden Linien sich bewegendem Strahlen parallele gerade Linie, und nehmen den von dem Auge des Beobachters an nach der Gegend, von welcher die Strahlen her kommen, hin liegenden Theil dieser geraden Linie als den positiven Theil der ersten Axe, das Auge selbst aber als den Anfang eines in einer beliebigen durch die in Rede stehende gerade Linie gelegten Ebene liegenden rechtwinkligen Coordinatensystems der  $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$  an. Die Coordinaten des Mittelpunkts eines mit einem der Einheit gleichen Halbmesser in derselben Ebene beschriebenen Kreises in Bezug auf das in Rede stehende Coordinatensystem seien  $P, Q$ . Legen wir dann durch den Mittelpunkt dieses Kreises ein dem Systeme der  $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$  paralleles Coordinatensystem der  $xy$ , so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten allgemein

$$155) \mathfrak{X} = P + x, \mathfrak{Y} = Q + y;$$

also

$$156) x = \mathfrak{X} - P, y = \mathfrak{Y} - Q.$$

Weil nun nach den obigen allgemeinen analytischen Entwicklungen für zwei Brechungen und  $n$  Zurückwerfungen die Gleichung der geraden Linie, durch welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt wird, in Bezug auf das System der  $xy$

$$157) y - Y_{n+1} = (x - X_{n+1}) \tan U'_{n+1}$$

ist, wo die Grössen  $X_{n+1}, Y_{n+1}$  und  $\tan U'_{n+1}$  bekanntlich nur von  $\mu$  abhängen; so ist nach dem Vorhergehenden



158)  $\mathfrak{X} - Q - Y_{n+1} = (\mathfrak{X} - P - X_{n+1}) \tan U'_{n+1}$   
 die Gleichung dieser geraden Linie im Systeme der  $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$ , dessen Anfang das Auge des Beobachters ist.

Die Ebene der  $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$  wollen wir jetzt, was offenbar verstatet ist, vertikal annehmen, und in dieser Ebene durch das Auge des Beobachters ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der  $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}'$  legen, dessen Axe der  $\mathfrak{X}'$  horizontal ist. Den positiven Theil der Axe der  $\mathfrak{X}'$  nehmen wir so an, dass er mit dem positiven Theile der Axe der  $\mathfrak{X}$  einen spitzen Winkel einschliesst; der positive Theil der Axe der  $\mathfrak{Y}'$  sei von dem Auge des Beobachters nach dem Zenith gerichtet; und der positive Theil der Axe der  $\mathfrak{Y}$  werde jetzt so angenommen, dass er mit dem positiven Theile der Axe der  $\mathfrak{Y}'$  einen dem von den positiven Theilen der Axen der  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{X}'$  eingeschlossenen spitzen Winkel gleichen spitzen Winkel einschliesst. Den, jenachdem der positive Theil der Axe der  $\mathfrak{X}$  auf der positiven oder negativen Seite der Axe der  $\mathfrak{X}'$  liegt, als positiv oder negativ betrachteten, von den positiven Theilen der Axen der  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{X}'$  eingeschlossenen spitzen Winkel bezeichne man aber durch  $H$ . Dann hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten der Systeme der  $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$  und  $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}'$  die folgenden allgemein gültigen Relationen:

$$159) \begin{cases} \mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \cos H - \mathfrak{Y} \sin H, \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X} \sin H + \mathfrak{Y} \cos H \end{cases}$$

also, wie hieraus mittelst leichter Rechnung folgt:

$$160) \begin{cases} \mathfrak{X} = \mathfrak{X}' \cos H + \mathfrak{Y}' \sin H, \\ \mathfrak{Y} = -\mathfrak{X}' \sin H + \mathfrak{Y}' \cos H. \end{cases}$$

Also ist auch, wenn wir die Coordinaten des Mittelpunkts des beschriebenen Kreises in dem Systeme der  $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}'$  durch  $P', Q$  bezeichnen:

$$161) \begin{cases} P' = P \cos H - Q \sin H, \\ Q' = P \sin H + Q \cos H \end{cases}$$

und

$$162) \begin{cases} P = P' \cos H + Q' \sin H, \\ Q = -P' \sin H + Q' \cos H. \end{cases}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} - P &= (\mathfrak{X}' - P') \cos H + (\mathfrak{Y}' - Q') \sin H, \\ \mathfrak{Y} - Q &= -(\mathfrak{X}' - P') \sin H + (\mathfrak{Y}' - Q') \cos H; \end{aligned}$$



und die Gleichung der geraden Linie, durch welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt wird, ist also nach 158)

$$- (\mathfrak{X}' - P') \sin H + (\mathfrak{Y}' - Q') \cos H - Y_{n+1} \\ = \{ (\mathfrak{X}' - P') \cos H + (\mathfrak{Y}' - Q') \sin H - X_{n+1} \} \tan U'_{n+1}$$

oder

$$- (\mathfrak{X}' - P') (\sin H \cos U'_{n+1} + \cos H \sin U'_{n+1}) \\ + (Y' - Q') (\cos H \cos U'_{n+1} - \sin H \sin U'_{n+1}) \\ = - (X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1}),$$

d. i.

$$163) (\mathfrak{X}' - P') \sin (H + U'_{n+1}) - (\mathfrak{Y}' - Q') \cos (H + U'_{n+1}) \\ = X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1}.$$

Wenn nun das Auge des Beobachters überhaupt einen Regenbogen sehen soll, so muss die durch diese Gleichung charakterisirte gerade Linie durch das Auge des Beobachters oder den Anfang der  $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}'$  gehen, d. i. es muss gleichzeitig  $\mathfrak{X}' = 0$ ,  $\mathfrak{Y}' = 0$  sein, welches nach dem Vorhergehenden durch die Gleichung

$$164) P' \sin (H + U'_{n+1}) - Q' \cos (H + U'_{n+1}) \\ = - (X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1})$$

bedingt wird; und in der durch diese Gleichung, wenn man  $P'$  und  $Q'$  als die veränderlichen Coordinaten betrachtet, charakterisirten geraden Linie muss also der Mittelpunkt des Kreises liegen, welchen wir uns vorher mit einem der Einheit gleichen Halbmesser um den Mittelpunkt ( $PQ$ ) oder ( $P'Q'$ ) in der Ebene der  $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$  oder  $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}'$  beschrieben gedacht haben. Diese Gleichung muss also nothwendig durch die Coordinaten  $P'$ ,  $Q'$  des Mittelpunkts des beschriebenen Kreises erfüllt angenommen werden, wenn das Auge des Beobachters einen Regenbogen sehen soll. Dann ist aber nach 163) und 164) die Gleichung der geraden Linie, durch welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt wird,

$$165) \mathfrak{X}' \sin (H + U'_{n+1}) - \mathfrak{Y}' \cos (H + U'_{n+1}) = 0$$

oder

$$166) \mathfrak{Y}' = \mathfrak{X}' \tan (H + U'_{n+1}).$$

Soll aber das Auge des Beobachters einen Regenbogen wirklich erblicken, so ist, wie leicht erhellen wird, nicht bloss hinreichend, dass die Coordinaten  $P'$ ,  $Q'$  des Mittelpunkts des beschriebenen Kreises der Gleichung 164) genügen, wodurch nur bedingt wird, dass das Auge in der durch diese Gleichung charakterisirten geraden Linie liege, sondern es ist ausserdem unbedingt nothwen-



dig, dass das Auge von den als von dem Punkte  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$ , wo die Coordinaten  $X_{n+1}, Y_{n+1}$  bekanntlich dem Systeme der  $xy$  angehören, ausgehend gedachten wirksamen Strahlen getroffen werde, und es liegt uns also noch ob, auch diese Bedingung auf einen analytischen Ausdruck zu bringen.

Nun wird man sich aber durch eine einfache geometrische Betrachtung, bei der man sich nur zu erinnern hat, dass  $P + X_{n+1}, Q + Y_{n+1}$  die Coordinaten des in dem Systeme der  $xy$  durch  $X_{n+1}, Y_{n+1}$  bestimmten Punktes in dem Systeme der  $\mathfrak{X} \mathfrak{Y}$  sind, ohne Schwierigkeit überzeugen, dass zur Erfüllung der vorhergehenden Bedingung nothwendig erforderlich ist, dass Folgendes Statt finde, wobei wir nun immer die Gleichung 164) als erfüllt voraussetzen, was kaum noch einer besonderen Bemerkung bedarf. Wenn  $P + X_{n+1}$  positiv,  $Q + Y_{n+1}$  positiv ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $U'_{n+1}$  zwischen  $180^\circ$  und  $270^\circ$  liegt, d. h. dadurch, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist; wenn  $P + X_{n+1}$  negativ,  $Q + Y_{n+1}$  positiv ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $U'_{n+1}$  zwischen  $270^\circ$  und  $360^\circ$  liegt, d. h. dadurch, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist; wenn  $P + X_{n+1}$  positiv,  $Q + Y_{n+1}$  negativ ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $U'_{n+1}$  zwischen  $90^\circ$  und  $180^\circ$  liegt, d. h. dadurch, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist; wenn  $P + X_{n+1}$  negativ,  $Q + Y_{n+1}$  negativ ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $U'_{n+1}$  zwischen  $0$  und  $90^\circ$  liegt, d. h. dadurch, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Weil man aber im vorliegenden Falle den Halbmesser des beschriebenen Kreises im Verhältniss zu den absoluten Werthen der Coordinaten  $P, Q$  offenbar immer so klein anzunehmen berechtigt ist, dass  $P, Q$  respective mit  $P + X_{n+1}, Q + Y_{n+1}$  gleiche Vorzeichen haben, so lassen sich die obigen Kriterien auch auf den folgenden Ausdruck bringen.

Wenn  $P$  positiv,  $Q$  positiv ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist; wenn  $P$  negativ,  $Q$  positiv ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist; wenn  $P$  positiv,  $Q$  negativ ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist; wenn  $P$  negativ,  $Q$  negativ ist, so wird die Entstehung eines Re-



genbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Nach dem Obigen haben wir die Gleichungen

$$P = P' \cos H + Q' \sin H,$$

$$Q = -P' \sin H + Q' \cos H.$$

Betrachten wir nun zuerst den Fall, wenn  $H$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  positiv und  $P'$  positiv ist, so ist  $P$  positiv, und  $Q$  ist positiv oder negativ, jenachdem

$$Q' \cos H > P' \sin H \text{ oder } Q' \cos H < P' \sin H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} > \tan H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} < \tan H$$

ist.

Wenn  $Q'$  positiv und  $P'$  negativ ist, so ist  $Q$  positiv, und  $P$  ist positiv oder negativ, jenachdem

$$Q' \sin H > -P' \cos H \text{ oder } Q' \sin H < -P' \cos H,$$

d. h. jenachdem

$$-\frac{Q'}{P'} > \cot H \text{ oder } -\frac{Q'}{P'} < \cot H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < -\cot H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > -\cot H$$

ist.

Wenn  $Q'$  negativ und  $P'$  positiv ist, so ist  $Q$  negativ, und  $P$  ist positiv oder negativ, jenachdem

$$-Q' \sin H < P' \cos H \text{ oder } -Q' \sin H > P' \cos H,$$

d. h. jenachdem

$$-\frac{Q'}{P'} < \cot H \text{ oder } -\frac{Q'}{P'} > \cot H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} > -\cot H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} < -\cot H$$

ist.

Wenn  $Q'$  negativ und  $P'$  negativ ist, so ist  $P$  negativ, und  $Q$  ist positiv oder negativ, jenachdem

$$-Q' \cos H < -P' \sin H \text{ oder } -Q' \cos H > -P' \sin H,$$

d. h. jenachdem



$$\frac{Q'}{P'} < \operatorname{tang} H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > \operatorname{tang} H$$

ist.

Also kann man die obigen Kriterien auch auf den folgenden Ausdruck bringen.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv und

$$\frac{Q'}{P'} > \operatorname{tang} H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv und

$$\frac{Q'}{P'} < \operatorname{tang} H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ und

$$\frac{Q'}{P'} < -\cot H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ und

$$\frac{Q'}{P'} > -\cot H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv und

$$\frac{Q'}{P'} > -\cot H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv und

$$\frac{Q'}{P'} < -\cot H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ und

$$\frac{Q'}{P'} < \operatorname{tang} H$$



ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ und

$$\frac{Q'}{P'} > \tan H$$

ist, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wegen der Gleichung 164) ist aber

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1}) + \frac{X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1}}{P' \cos(H + U'_{n+1})},$$

und man wird also, weil im vorliegenden Falle der absolute Werth von

$$\frac{X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1}}{P' \cos(H + U'_{n+1})}$$

immer eine sehr kleine Grösse ist, im Vorhergehenden statt  $\frac{Q'}{P'}$  überall unbedenklich  $\tan(H + U'_{n+1})$  setzen können.

Die Bedingung

$$\tan(H + U'_{n+1}) \geq \tan H$$

ist jedoch einerlei mit der Bedingung

$$\tan(H + U'_{n+1}) - \tan H \geq 0,$$

d. i. mit der Bedingung

$$\frac{\sin U'_{n+1}}{\cos H \cos(H + U'_{n+1})} \geq 0,$$

wo dem obern Zeichen die Bedingung, dass

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, dem untern Zeichen die Bedingung, dass

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, entspricht.

Die Bedingung

$$\tan(H + U'_{n+1}) \geq -\cot H$$

ist einerlei mit der Bedingung

$$\tan(H + U'_{n+1}) + \cot H \geq 0,$$

d. i. mit der Bedingung



$$\frac{\cos U'_{n+1}}{\sin H \cos (H + U'_{n+1})} \geq 0,$$

wo dem obern Zeichen die Bedingung, dass

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos (H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, dem untern Zeichen die Bedingung, dass

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos (H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, entspricht.

Also lassen sich die obigen Kriterien nun auch auf den folgenden sehr bequemen Ausdruck bringen.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos (H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos (H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos (H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos (H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos (H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos (H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regen-



bogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Betrachten wir ferner auf ganz ähnliche Art den Fall, wenn  $H$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  positiv und  $P'$  positiv ist, so ist  $Q$  positiv, und  $P$  ist positiv oder negativ, jenachdem

$$- Q' \sin H < P' \cos H \text{ oder } - Q' \sin H > P' \cos H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < -\cot H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > -\cot H$$

ist.

Wenn  $Q'$  positiv und  $P'$  negativ ist, so ist  $P$  negativ und  $Q$  ist positiv oder negativ, jenachdem

$$Q' \cos H > P' \sin H \text{ oder } Q' \cos H < P' \sin H,$$

d. h. jenachdem

$$-\frac{Q'}{P'} > -\tan H \text{ oder } -\frac{Q'}{P'} < -\tan H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < \tan H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > \tan H$$

ist.

Wenn  $Q'$  negativ und  $P'$  positiv ist, so ist  $P$  positiv, und  $Q$  ist positiv oder negativ, jenachdem

$$- Q' \cos H < - P' \sin H \text{ oder } - Q' \cos H > - P' \sin H,$$

d. h. jenachdem

$$-\frac{Q'}{P'} < -\tan H \text{ oder } -\frac{Q'}{P'} > -\tan H,$$



d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} < \operatorname{tang} H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} > \operatorname{tang} H$$

ist.

Wenn  $Q'$  negativ und  $P'$  negativ ist, so ist  $Q$  negativ, und  $P$  ist positiv oder negativ, jenachdem

$$Q' \sin H > -P' \cos H \text{ oder } Q' \sin H < -P' \cos H,$$

d. h. jenachdem

$$\frac{Q'}{P'} > -\cot H \text{ oder } \frac{Q'}{P'} < -\cot H$$

ist.

Hieraus ergeben sich auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Falle die folgenden Kriterien.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbo-



gens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv ist, und

$$\sin U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

gleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Wenn  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ ist, und

$$\cos U'_{n+1} \text{ und } \cos(H + U'_{n+1})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so wird die Entstehung eines Regenbogens dadurch vollständig bedingt, dass  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv ist.

Dass die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1}) + \frac{X_{n+1} \sin U'_{n+1} - Y_{n+1} \cos U'_{n+1}}{P' \cos(H + U'_{n+1})},$$

für welche näherungsweise die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

gesetzt werden darf, erfüllt sei, wird bei dem Vorhergehenden, wie schon oben erinnert worden ist, stets vorausgesetzt.

Die Gleichung der geraden Linie, durch welche die Lage der wirksamen Strahlen bestimmt wird, war nach dem Obigen

$$\mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \tan(H + U'_{n+1}).$$

Bezeichnen wir aber durch

$$U'_{n+1}^1, U'_{n+1}^2, U'_{n+1}^3, U'_{n+1}^4, U'_{n+1}^5, U'_{n+1}^6, U'_{n+1}^7$$

die den sieben farbigen Strahlen, aus denen jeder weisse Lichtstrahl zusammengesetzt ist, entsprechenden Werthe des Winkels  $U'_{n+1}$ , so entsprechen den wirksamen Strahlen für diese sieben farbigen Strahlen die folgenden Gleichungen:



$$167) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \operatorname{tang}(H + \overset{1}{U}'_{n+1}), \\ \mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \operatorname{tang}(H + \overset{2}{U}'_{n+1}), \\ \mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \operatorname{tang}(H + \overset{3}{U}'_{n+1}), \\ \mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \operatorname{tang}(H + \overset{4}{U}'_{n+1}), \\ \mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \operatorname{tang}(H + \overset{5}{U}'_{n+1}), \\ \mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \operatorname{tang}(H + \overset{6}{U}'_{n+1}), \\ \mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \operatorname{tang}(H + \overset{7}{U}'_{n+1}). \end{array} \right.$$

Ist der leuchtende Körper die Sonne,  $H$  ihre positive oder negative Höhe über oder unter dem Horizonte, und  $D$  ihr scheinbarer Halbmesser, so hat man für die äussersten wirksamen Strahlen die Gleichung

$$168) \mathcal{X}' = \mathfrak{X}' \operatorname{tang}(H \pm D + U'_{n+1}),$$

wo in allen Fällen das obere Zeichen dem obern, das untere Zeichen dem untern Sonnenrande entspricht, wobei man unter dem obern und untern Sonnenrande jederzeit den Sonnenrand zu verstehen hat, welcher (nicht absolut genommen) respective die grösste und kleinste Höhe hat.

Wie man durch Drehung der Vertikalebene, in welcher die ganze vorhergehende Betrachtung angestellt worden ist, um die durch das Auge den parallel einfallenden Strahlen parallel gelegte gerade Linie, wie um eine Axe, den ganzen Bogen erhalten kann, ist eine so einfache Vorstellung und eine schon so oft angestellte Betrachtung, dass es kaum erforderlich sein dürfte, derselben hier nur Erwähnung zu thun.

### §. 30.

Wir wollen nun zuerst den Fall etwas ausführlicher betrachten, wenn  $\cos U'_{n+1}$  positiv ist \*).

In diesem Falle hat  $U'_{n+1}$  einen zwischen  $0$  und  $90^\circ$ , und einen zwischen  $270^\circ$  und  $360^\circ$  liegenden Werth. Diese beiden Wer-

---

\*) Dieser Fall tritt, wie die Formeln 95) leicht ergeben, z. B. dann ein, wenn  $n=1$  ist, und die Strahlen aus Luft in Wasser übergehen, d. h. wenn  $\mu=0,749$  gesetzt wird. Dasselbe gilt unter dieser Voraussetzung nach den Formeln 105) auch für  $n=2$ .



the von  $U'_{n+1}$  wollen wir durch  $W$  und  $W'$  bezeichnen, so dass also

$$\begin{aligned} 0 < W < 90^\circ, \\ 270^\circ < W' < 360^\circ \end{aligned}$$

und, wie sich von selbst versteht,

$$W + W' = 360^\circ$$

ist.

Zuerst werde  $H$  als positiv angenommen.

In diesem Falle ist offenbar entweder

$$0 < H + W < 90^\circ$$

oder

$$90^\circ < H + W < 180^\circ,$$

und entweder

$$270^\circ < H + W' < 360^\circ$$

oder

$$360^\circ < H + W' < 450^\circ.$$

Es sei  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv.

Da in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen  $\cos U'_{n+1}$  negativ sein muss, nach der Voraussetzung aber  $\cos U'_{n+1}$  positiv ist, so kann in demselben kein Regenbogen entstehen.

Es sei  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^\circ < H + W < 180^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^\circ < H + W' < 360^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Beide Bedingungen sind erfüllt, und die Gleichung



$$\frac{Q'}{P'} = \text{tang}(H + U'_{n+1})$$

enthält auch keinen Widerspruch. Also entsteht ein Regenbogen. Statt der obigen Bedingung kann man

$$270^\circ - W' < H < 360^\circ - W'$$

setzen. Weil aber  $H$  positiv,  $270^\circ - W'$  negativ ist, so ist die Bedingung

$$270^\circ - W' < H$$

jederzeit erfüllt, und es bleibt also bloss die Bedingung

$$H < 360^\circ - W',$$

d. i. nach dem Obigen die Bedingung

$$H < W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$360^\circ < H + W' < 450^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Obgleich diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \text{tang}(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, da die Grösse links negativ, die Grösse rechts positiv ist. Also entsteht kein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^\circ < H + W < 180^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \text{tang}(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form



$$90^\circ - W < H < 180^\circ - W$$

bringen. Da aber die Bedingung

$$H < 180^\circ - W$$

offenbar immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H > 90^\circ - W.$$

Wenn also diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$270^\circ < H + W' < 360^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$360^\circ < H + W' < 450^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$-W < H < 90^\circ - W$$

bringen. Da die Bedingung

$$-W < H$$

immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H < 90^\circ - W.$$

Wenn also diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für



$$90^\circ < H + W < 180^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^\circ < H + W' < 360^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Obgleich diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

einen Widerspruch. Also entsteht kein Regenbogen.

Für

$$360^\circ < H + W' < 450^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$360^\circ - W' < H < 450^\circ - W'$$

bringen. Die Bedingung

$$H < 450^\circ - W'$$

ist aber immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H > 360^\circ - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H > 360^\circ - (360^\circ - W),$$

oder die Bedingung

$$H > W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Es bleiben also, wenn  $\cos U'_{n+1}$  positiv und  $H$  positiv ist, nur die vier folgenden Fälle übrig, wo ein Regenbogen entsteht:



$Q'$  positiv,  $P'$  negativ,  $H < W$ ;

$Q'$  negativ,  $P'$  positiv,  $H > 90^\circ - W$ ;

$Q'$  negativ,  $P'$  negativ,  $H < 90^\circ - W$ ;

$Q'$  negativ,  $P'$  negativ,  $H > W$ .

Ferner werde  $H$  als negativ angenommen.

In diesem Falle ist offenbar entweder

$$-90^\circ < H + W < 0$$

oder

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

und

$$180^\circ < H + W' < 270^\circ$$

oder

$$270^\circ < H + W' < 360.$$

Es sei  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv.

Für

$$-90^\circ < H + W < 0,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W' < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^\circ < H + W' < 360^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung



$$\frac{Q'}{P'} = \operatorname{tang}(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ.

Für

$$-90^\circ < H + W < 0,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \operatorname{tang}(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung kann man auch auf die Form

$$-90^\circ - W < H < -W$$

bringen. Da die Bedingung

$$-90^\circ - W < H$$

immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H < -W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \operatorname{tang}(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W' < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^\circ < H + W' < 360^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ



sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$270^\circ - W' < H < 360^\circ - W'$$

bringen. Da die Bedingung

$$H < 360^\circ - W'$$

immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H > 270^\circ - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H > 270^\circ - (360^\circ - W),$$

oder die Bedingung

$$H > W - 90^\circ.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv.

Da in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen  $\cos U'_{n+1}$  negativ sein muss, nach der Voraussetzung aber  $\cos U'_{n+1}$  positiv ist, so kann kein Regenbogen entstehen.

Es sei  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ.

Für

$$-90^\circ < H + W < 0,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W' < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für



$$270^{\circ} < H + W' < 360^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es bleiben also, wenn  $\cos U'_{n+1}$  positiv und  $H$  negativ ist, nur die zwei folgenden Fälle übrig, wo ein Regenbogen entsteht:

$$Q' \text{ positiv, } P' \text{ negativ, } H < -W;$$

$$Q' \text{ positiv, } P' \text{ negativ, } H > W - 90^{\circ}.$$

### §. 31.

Auf ähnliche Art wie vorher wollen wir ferner den Fall betrachten, wenn  $\cos U'_{n+1}$  negativ ist.

In diesem Falle hat  $U'_{n+1}$  einen zwischen  $90^{\circ}$  und  $180^{\circ}$ , und einen zwischen  $180^{\circ}$  und  $270^{\circ}$  liegenden Werth. Diese beiden Werthe von  $U'_{n+1}$  wollen wir wieder respective durch  $W$  und  $W'$  bezeichnen, so dass also

$$90^{\circ} < W < 180^{\circ},$$

$$180^{\circ} < W' < 270^{\circ}$$

und, wie sich von selbst versteht,

$$W + W' = 360^{\circ}$$

ist.

Zuerst werde  $H$  als positiv angenommen.

In diesem Falle ist offenbar entweder

$$90^{\circ} < H + W < 180^{\circ}$$

oder

$$180^{\circ} < H + W < 270^{\circ},$$

und entweder

$$180^{\circ} < H + W' < 270^{\circ}$$

oder

$$270^{\circ} < H + W' < 360^{\circ}.$$

Es sei  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv.

Für

$$90^{\circ} < H + W < 180^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein.



Obgleich diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \text{tang}(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \text{tang}(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$180^\circ - W < H < 270^\circ - W$$

bringen. Die Bedingung

$$H < 270^\circ - W$$

ist immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H < 180^\circ - W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W' < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \text{tang}(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch unter der Form

$$180^\circ - W' < H < 270^\circ - W'$$

darstellen. Die Bedingung

$$H < 180^\circ - W'$$

ist immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H < 270^\circ - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H < 270^\circ - (360^\circ - W),$$

oder die Bedingung

$$H < W - 90^\circ.$$



Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$270^{\circ} < H + W' < 360^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ.

Für

$$90^{\circ} < H + W < 180^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^{\circ} < H + W < 270^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^{\circ} < H + W' < 270^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die erste dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^{\circ} < H + W' < 360^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung lässt sich auch auf die Form

$$270^{\circ} - W' < H < 360^{\circ} - W'$$

bringen. Da die Bedingung

$$H < 360^{\circ} - W'$$



immer erfüllt ist, so bleibt nur die Bedingung

$$H < 270^\circ - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H < 270^\circ - (360^\circ - W),$$

oder die Bedingung

$$H < W - 90^\circ.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv.

Für

$$90^\circ < H + W < 180^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muß  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muß  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W' < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muß  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch. Also entsteht kein Regenbogen.

Für

$$270^\circ < H + W' < 360^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muß  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ.

Da in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen



$\cos U'_{n+1}$  positiv sein muss, nach der Voraussetzung aber  $\cos U'_{n+1}$  negativ ist, so kann in demselben kein Regenbogen entstehen.

Es bleiben also, wenn  $\cos U'_{n+1}$  negativ und  $H$  positiv ist, nur die drei folgenden Fälle übrig, wo ein Regenbogen entsteht:

$$\begin{aligned} Q' \text{ positiv, } P' \text{ positiv, } H > 180^\circ - W; \\ Q' \text{ positiv, } P' \text{ positiv, } H < W - 90^\circ; \\ Q' \text{ positiv, } P' \text{ negativ, } H > W - 90^\circ. \end{aligned}$$

Ferner werde  $H$  als negativ angenommen.

In diesem Falle ist offenbar entweder

$$\begin{aligned} &0 < H + W < 90^\circ \\ \text{oder} &90^\circ < H + W < 180^\circ, \end{aligned}$$

und entweder

$$\begin{aligned} &90^\circ < H + W' < 180^\circ \\ \text{oder} &180^\circ < H + W' < 270^\circ. \end{aligned}$$

Es sei  $Q'$  positiv,  $P'$  positiv.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^\circ < H + W < 180^\circ$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da keine dieser beiden Bedingungen erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^\circ < H + W' < 180^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die erste dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W' < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos (H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein.



Da die erste dieser beiden Bedingungen nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  positiv,  $P'$  negativ.

Da in diesem Falle nach dem vorhergehenden Paragraphen  $\cos U'_{n+1}$  positiv sein muss, nach der Voraussetzung aber  $\cos U'_{n+1}$  negativ ist, so entsteht in demselben kein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  negativ,  $P'$  positiv.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^\circ < H + W < 180^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung kann auch auf die Form

$$90^\circ - W < H < 180^\circ - W$$

gebracht werden. Die Bedingung

$$H < 180^\circ - W$$

ist immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H > 90^\circ - W.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$90^\circ < H + W' < 180^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Da diese Bedingungen beide erfüllt sind, und auch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

keinen Widerspruch enthält, so entsteht ein Regenbogen. Die obige Bedingung kann auch auf die Form



$$90^\circ - W' < H < 180^\circ - W'$$

gebracht werden. Die Bedingung

$$H > 90^\circ - W'$$

ist immer erfüllt. Also bleibt nur die Bedingung

$$H < 180^\circ - W',$$

d. h. die Bedingung

$$H < 180^\circ - (360^\circ - W),$$

oder die Bedingung

$$H < W - 180^\circ.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so entsteht ein Regenbogen.

Für

$$180^\circ < H + W' < 270^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\sin U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  negativ sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Es sei  $Q'$  negativ,  $P'$  negativ.

Für

$$0 < H + W < 90^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  ungleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  positiv,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da die erste Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$90^\circ < H + W < 180^\circ,$$

wo  $U'_{n+1} = W$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Obgleich diese Bedingungen beide erfüllt sind, so enthält doch die Gleichung

$$\frac{Q'}{P'} = \tan(H + U'_{n+1})$$

offenbar einen Widerspruch, und es entsteht also kein Regenbogen.

Für



$$90^{\circ} < H + W' < 180^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Für

$$180^{\circ} < H + W' < 270^{\circ},$$

wo  $U'_{n+1} = W'$  ist, haben  $\cos U'_{n+1}$  und  $\cos(H + U'_{n+1})$  gleiche Vorzeichen. Also muss  $\cos U'_{n+1}$  negativ,  $\sin U'_{n+1}$  positiv sein. Da die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, so entsteht kein Regenbogen.

Es bleiben also, wenn  $\cos U'_{n+1}$  negativ und  $H$  negativ ist, nur die zwei folgenden Fälle übrig, wo ein Regenbogen entsteht:

$Q'$  negativ,  $P'$  positiv,  $H > 90^{\circ} - W$ ;

$Q'$  negativ,  $P'$  positiv,  $H < W' - 180^{\circ}$ .

## §. 32.

Bevor wir in der Theorie des Regenbogens weiter fortschreiten, wollen wir grösserer Deutlichkeit wegen zuvörderst eine kurze Entwicklung der Hauptmomente der physischen Theorie der Brechung des Lichts einschalten, weil wir dieselbe im Folgenden gebrauchen werden, bemerken aber, dass wir uns bei der Entwicklung dieser Theorie hier absichtlich den älteren Ansichten anschliessen werden.

Die bekanntesten Erfahrungen über die Brechung des Lichts bieten uns ein hinreichend sicheres Fundament dar, auf welchem wir die Theorie der Refraction auführen können, weshalb wir auch die Sätze, welche unserer ganzen folgenden Untersuchung zur hauptsächlichsten Grundlage dienen werden, jetzt zuerst zusammenstellen wollen.

Zuvörderst führt uns die Erfahrung, dass ein Lichtstrahl, welcher aus einem dünneren in einen dichteren durchsichtigen Körper, oder aus dem leeren Raume in einen durchsichtigen Körper von beliebiger Dichtigkeit übergeht, in letzterem jederzeit nach dem Einfallslothe hin gebrochen wird, unmittelbar auf die Annahme einer anziehenden Kraft, mit welcher die durchsichtigen Körper auf die durch sie hindurch gehenden Lichttheilchen wirken.

Diese Kraft kann aber nur an der Oberfläche der durchsichtigen Körper, oder wenigstens bloss in äusserst geringen Entfernun-



gen von derselben wirksam sein, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, der Lichtstrahl nicht vor und nach der Brechung eine gerade Linie bilden könnte, sondern schon in merklichen Entfernungen von derselben gekrümmt erscheinen müsste, was bekanntlich der Erfahrung gänzlich widerspricht.

Weil endlich Strahlen, welche die brechende Fläche unter rechten Winkeln treffen, bekanntlich gar keine Brechung erleiden, so muss offenbar die Kraft, mit welcher die durchsichtigen Körper die Lichttheilchen anziehen, immer bloss nach einer auf ihrer Oberfläche senkrechten Richtung wirken.

Auf dem von diesen Sätzen uns dargebotenen Fundamente wollen wir nun mit Hülfe analytischer Betrachtungen die physikalische Theorie der Refraction aufführen.

Zu dem Ende denken wir uns zuerst ein Lichttheilchen, welches, aus dem leeren Raume kommend, nach einer auf der Oberfläche eines durchsichtigen Körpers oder sogenannten brechenden Mediums senkrechten Richtung in dieses brechende Medium übergeht, und bezeichnen die Entfernung des leuchtenden Punktes, welcher das Lichttheilchen aussendete, von der Oberfläche des brechenden Mediums durch  $a$ .

Befindet sich nun, wie wir zuerst annehmen wollen, das Lichttheilchen noch ausserhalb des brechenden Mediums, so sei  $x$  seine der seit dem Momente seines Ausgangs von dem leuchtenden Punkte verflossenen Zeit  $t$  entsprechende Entfernung von der Oberfläche des brechenden Mediums, und  $s$  sei der von dem Lichttheilchen in der Zeit  $t$  zurückgelegte Weg. Ist dann  $\varphi$  die der Entfernung  $x$  entsprechende Intensität der Kraft, mit welcher das Lichttheilchen von dem brechenden Medium angezogen wird, so ist bekanntlich nach den Principien der Mechanik:

$$169) \quad \varphi = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Weil aber offenbar  $s = a - x$ , und folglich

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

ist, so ist

$$170) \quad \varphi = - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Dass die, gleichen Entfernungen entsprechenden anziehenden Kräfte verschiedener brechender Media sich wie deren Dichtigkeiten



verhalten müssen, erhellet auf der Stelle, wenn man nur überlegt, dass ein brechendes Medium, welches, indem  $n$  eine positive ganze Zahl bezeichnet,  $n$  Mal so dicht ist als ein anderes, wie ein System von  $n$  brechenden Medien von des letzteren Dichtigkeit, die sich gegenseitig durchdrungen haben, betrachtet werden kann, und dass diese  $n$  Media in derselben Entfernung offenbar eine  $n$  Mal so grosse Attraction wie das Medium von der einfachen Dichtigkeit auf das Lichttheilchen ausüben werden. Bezeichnen wir daher die Dichtigkeit unsers obigen brechenden Mediums, welches in der Entfernung  $x$  die anziehende Kraft  $\varphi$  ausübt, durch  $D$ , die der Entfernung  $x$  entsprechende anziehende Kraft eines brechenden Mediums, dessen Dichtigkeit als Einheit der Dichtigkeiten angenommen wird, aber durch  $F(x)$ ; so ist

$$171) \varphi = DF(x),$$

und folglich nach dem Obigen

$$172) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = - DF(x).$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung mit  $\partial x$ , und integrirt dann, so erhält man, weil  $D$ , als die Dichtigkeit eines bestimmten brechenden Mediums, offenbar als constant betrachtet werden muss, wenn  $A$  eine willkürliche Constante bezeichnet,

$$173) \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial x = A - D \int F(x) \partial x.$$

Durch theilweise Integration ergibt sich aber leicht

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial x &= \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial t} \partial t \\ &= \frac{\partial x}{\partial t} \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial t - \int \partial \frac{\partial x}{\partial t} \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial t \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - \int \frac{\partial x}{\partial t} \partial \frac{\partial x}{\partial t} \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2, \end{aligned}$$

d. i.

$$\int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2,$$

und folglich nach dem Obigen, wenn wir der Kürze wegen  $2A = C$  setzen:



$$174) \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 = C - 2D \int F(x) \partial x.$$

Ist nun  $v$  die der Entfernung  $x$  entsprechende Geschwindigkeit des Lichttheilchens, so ist nach den Principien der Mechanik bekanntlich

$$175) v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial (a - x)}{\partial t} = - \frac{\partial x}{\partial t},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$176) v^2 = C - 2D \int F(x) \partial x,$$

oder, wenn wir überhaupt

$$177) f(x) = \int F(x) \partial x$$

setzen:

$$178) v^2 = C - 2Df(x).$$

Im leeren Raume wird sich das Lichttheilchen in einer merklichen Entfernung von der Oberfläche des brechenden Mediums mit einer gewissen Geschwindigkeit, die wir durch  $w$  bezeichnen wollen, gleichförmig bewegen, weil, wie wir aus dem Obigen wissen, die Attraction des brechenden Mediums nur in ganz unmerklichen Entfernungen von seiner Oberfläche auf das Licht wirkt, und es ist also nach der Gleichung 178) offenbar

$$179) w^2 = C - 2Df(\infty).$$

Ist ferner  $V$  die bei dem Eintritte in das brechende Medium, d. i. für  $x = 0$ , erlangte Geschwindigkeit des Lichttheilchens, so ist nach der Gleichung 178)

$$180) V^2 = C - 2Df(0),$$

und folglich nach den beiden vorhergehenden Gleichungen

$$181) V^2 - w^2 = 2D\{f(\infty) - f(0)\}.$$

Weil nun aber nach 177)

$$f(\infty) - f(0) = \int_0^\infty F(x) \partial x$$

ist, so ist

$$182) V^2 - w^2 = 2D \int_0^\infty F(x) \partial x.$$

Nach dem Obigen bezeichnet  $F(x)$  die Intensität der anziehenden Kraft eines brechenden Mediums, dessen Dichtigkeit als Einheit der Dichtigkeiten angenommen worden ist, in der Entfernung  $x$  von seiner Oberfläche, und es ist also offenbar

$$\int_0^\infty F(x) \partial x = f(\infty) - f(0)$$

für alle brechende Media eine constante Grösse, welche wir, da



dieselbe, weil  $D$  und  $V^2 - w^2$  offenbar positive Grössen sind, augenscheinlich ebenfalls positiv sein muss, durch  $k^2$  bezeichnen wollen, so dass also nun die Gleichung 182) die Gestalt

$$183) V^2 - w^2 = 2 k^2 D$$

erhält.

Ferner denke man sich jetzt, dass das Lichttheilchen bis zur Tiefe  $x$  in das brechende Medium eingedrungen sei, bezeichne die von dem Momente des Ausgangs des Lichttheilchens von dem leuchtenden Punkte an gerechnete Zeit, wo das Lichttheilchen diese Tiefe erreicht, wieder durch  $t$ , den ganzen von dem Lichttheilchen in dieser Zeit zurückgelegten Weg durch  $s$ , und die der Tiefe  $x$  entsprechende Intensität der Kraft, mit welcher das Lichttheilchen von dem brechenden Medium angezogen wird, durch  $\varphi$ ; so ist nach den Principien der Mechanik wieder:

$$184) \varphi = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2},$$

und folglich, weil offenbar  $s = a + x$ , also

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

ist:

$$185) \varphi = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

Nun ist aber klar, dass die bis zur Tiefe  $2x$  unter der Oberfläche liegenden Theilchen des brechenden Mediums gar keine Wirkung auf den Lichtpunkt ausüben, oder vielmehr, dass die anziehenden Kräfte, mit denen die oberhalb und unterhalb des Lichtpunkts liegenden Theile des brechenden Mediums auf denselben wirken, sich gegenseitig aufheben, und daher als überhaupt nicht vorhanden betrachtet werden können. Also wird das Lichttheilchen von den anziehenden Kräften des brechenden Mediums ganz eben so afficirt, als wenn es sich ausserhalb desselben in der Entfernung  $x$  von seiner Oberfläche befände, indem eigentlich nur die Theile des brechenden Mediums auf das Licht wirken, deren Entfernung von der Oberfläche des brechenden Mediums nicht kleiner als  $2x$  ist. Die auf das in der Tiefe  $x$  unter der Oberfläche des brechenden Mediums befindliche Lichttheilchen wirkende beschleunigte Kraft ist folglich auf ganz ähnliche Art wie oben wieder  $DF(x)$ , und wir haben daher nach 185) die Gleichung



$$186) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = D F(x),$$

aus der sich ferner

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial x = D F(x) \partial x,$$

also, wenn  $A'$  eine willkürliche Constante bezeichnet,

$$187) \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial x = A' + D \int F(x) \partial x$$

ergiebt. Weil nun aber auf ganz ähnliche Art wie oben

$$\int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial t = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2$$

ist, so ist, wenn wir der Kürze wegen  $2A' = C'$  setzen:

$$188) \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 = C' + 2 D \int F(x) \partial x,$$

oder nach 177):

$$189) \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 = C' + 2 D f(x).$$

Bezeichnet aber  $v$  die der Tiefe  $x$  unter der Oberfläche des brechenden Mediums entsprechende Geschwindigkeit des Lichttheilchens, so ist nach den Principien der Mechanik

$$190) v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial (a + x)}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$191) v^2 = C' + 2 D f(x).$$

Ueberlegt man alles Obige nochmals genau, so übersieht man leicht, dass es, nachdem das Lichttheilchen in das brechende Medium eingedrungen ist, ganz eben so ist, als wenn die anziehende Kraft sich immer weiter und weiter von dem Lichttheilchen entfernte, je weiter dasselbe in das brechende Medium eindringt, und dass folglich, weil die anziehende Kraft immer bloss ganz in der Nähe der Oberfläche des brechenden Mediums auf das Lichttheilchen wirkt, die Bewegung desselben sehr bald nach dem Eintritte in das brechende Medium gleichförmig, oder, was dasselbe ist, seine Geschwindigkeit constant werden wird. Bezeichnen wir nun diese constante Geschwindigkeit des Lichttheilchens bei seiner Bewegung in dem brechenden Medium durch  $w'$ , seine Geschwindigkeit in der Nähe der Oberfläche, d. i. für  $x = 0$ , wie vorher durch  $V$ , so haben wir nach 191) die beiden Gleichungen



$$192) \quad w'^2 = C' + 2Df(\infty)$$

und

$$193) \quad V^2 = C' + 2Df(0),$$

aus denen durch Subtraction die Gleichung

$$194) \quad w'^2 - V^2 = 2D\{f(\infty) - f(0)\},$$

d. i. die Gleichung

$$195) \quad w'^2 - V^2 = 2D \int_0^\infty F(x) \partial x,$$

oder nach dem Obigen die Gleichung

$$196) \quad w'^2 - V^2 = 2k^2 D,$$

folgt.

Durch Addition der beiden Gleichungen 183.) und 196), nämlich der beiden Gleichungen

$$V^2 - w^2 = 2k^2 D, \quad w'^2 - V^2 = 2k^2 D$$

erhält man endlich die Gleichung

$$197) \quad w'^2 - w^2 = 4k^2 D,$$

wo, was hier wiederholt zu werden verdient,  $w$  und  $w'$  die constanten Geschwindigkeiten des Lichttheilchens vor und nach seinem Eintritte in das brechende Medium sind, vorausgesetzt, dass das Lichttheilchen aus dem leeren Raume in das brechende Medium übergeht.

### §. 33.

Seien nun  $A$  und  $B$  zwei brechende Media von den Dichtigkeiten  $D$  und  $D'$ , indem wir zugleich annehmen wollen, dass  $D'$  grösser als  $D$  sei. Aus dem Medium  $A$  gehe ein Lichtstrahl nach einer auf der die beiden Media von einander trennenden Fläche senkrechten Richtung in das Medium  $B$  über, und seine constanten Geschwindigkeiten in  $A$  und  $B$  seien respective  $v$  und  $v'$ . Das Medium  $B$  kann man sich aus zwei Medien  $A'$  und  $C$  von den Dichtigkeiten  $D$  und  $D' - D$  bestehend denken. Die Wirkungen der Medien  $A$  und  $A'$  auf das Lichttheilchen an der die beiden Media  $A$  und  $B$  von einander trennenden Fläche heben sich gegenseitig völlig auf, so dass, wenn das Medium  $C$  nicht da wäre, die Geschwindigkeit  $v$  des einfallenden Lichttheilchens gar keine Veränderung erleiden würde, und es also offenbar ganz eben so ist, als wenn das Lichttheilchen mit der Geschwindigkeit  $v$  aus dem leeren Raume nach einer auf der die beiden Media  $A$  und  $B$  von einander trennenden Fläche senkrechten Richtung in das Medium  $C$  von der Dichtigkeit  $D' - D$  überginge, woraus sich nach 197) unmittelbar die Gleichung



$$198) v'^2 - v^2 = 4k^2(D' - D),$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung

$$199) v^2 - v'^2 = 4k^2(D - D')$$

ergiebt.

### §. 34.

Auf die Fläche, welche die beiden brechenden Media  $A$ ,  $B$  von den Dichtigkeiten  $D$ ,  $D'$  von einander trennt, falle jetzt in dem Punkte  $O$  nach der ganz beliebigen Richtung  $MO$  ein aus dem Medium  $A$  kommender Lichtpunkt auf. Legt man nun durch  $MO$  eine auf der, die beiden brechenden Media von einander trennenden Fläche senkrecht stehende Ebene; so ist auf beiden Seiten dieser Ebene offenbar Alles völlig gleich, und daher kein Grund für das Heraustreten des Lichttheilchens aus dieser Ebene nach erfolgter Brechung nach der einen Seite derselben hin vorhanden, welcher nicht auch für das Heraustreten aus der in Rede stehenden Ebene nach ihrer andern Seite hin Statt fände, woraus sich ergiebt, dass sich das Lichttheilchen auch nach der Brechung noch in dieser Ebene nach einer gewissen Richtung  $ON$ , die also mit  $MO$  und dem Einfallslothe in einer und derselben Ebene liegt, bewegen wird.

In Taf. I. Fig. 6. sei die Ebene des Papiers die Ebene, in welcher das Lichttheilchen sich vor und nach der Brechung bewegt.  $KL$  sei der Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene, die in dem Einfallspunkte  $O$  die brechende Fläche, welche die beiden brechenden Media  $A$  und  $B$  von einander trennt, berührt. Das Einfallslotth sei  $AB$ . Die Wege des Lichttheilchens in den beiden brechenden Medien sind  $MO$  und  $ON$ , wie wir aus dem Vorhergehenden schon wissen.

Die constanten Geschwindigkeiten des Lichttheilchens in den beiden brechenden Medien  $A$  und  $B$  seien respective  $v$  und  $v'$ . Die von  $OM$  und  $ON$  mit dem Einfallslothe eingeschlossenen Winkel seien  $\omega$  und  $\omega'$ . In dem Einfallspunkte  $O$  zerlege man nun die Geschwindigkeit  $v = Om$  nach den Richtungen  $OL$  und  $OB$  in die beiden Seitengeschwindigkeiten

$$Om_1 = v \sin \omega, \quad Om' = v \cos \omega.$$

Macht man dasselbe mit der Geschwindigkeit  $v' = On$ , so ist, weil die anziehenden Kräfte der brechenden Medien senkrecht auf der brechenden Fläche wirken, klar, dass die nach  $OL$  gerichtete Seitengeschwindigkeit bloss von der in  $v'$  gewissermassen enthaltenen Geschwindigkeit  $v$  nach ihrer Richtung herrühren kann, und daher



nothwendig ebenfalls durch die Linie  $Om_1$  dargestellt werden muss, so dass also die beiden Seitengeschwindigkeiten, in welche sich die Geschwindigkeit  $v' = On$  nach  $OL$  und  $OB$  zerlegen lässt, offenbar

$$Om_1 = v' \sin \omega', \quad On' = v' \cos \omega'$$

sein werden. Da sich nun auf  $Om'$  und  $On'$  der vorhergehende Paragraph offenbar in seiner ganzen Ausdehnung anwenden lässt, so erhalten wir unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$200) \quad \begin{cases} v \sin \omega = v' \sin \omega', \\ v'^2 \cos \omega'^2 - v^2 \cos \omega^2 = 4k^2 (D' - D). \end{cases}$$

Eliminirt man  $v'$  aus diesen beiden Gleichungen, so ergibt sich nach und nach:

$$v^2 \frac{\sin \omega^2 \cos \omega'^2}{\sin \omega'^2} - v^2 \cos \omega^2 = 4k^2 (D' - D),$$

$$\frac{\sin \omega^2 \cos \omega'^2 - \cos \omega^2 \sin \omega'^2}{\sin \omega'^2} = \frac{4k^2 (D' - D)}{v^2},$$

$$\frac{\sin \omega^2 (1 - \sin \omega'^2) - \sin \omega'^2 (1 - \sin \omega^2)}{\sin \omega'^2} = \frac{4k^2 (D' - D)}{v^2},$$

$$\frac{\sin \omega^2 - \sin \omega'^2}{\sin \omega'^2} = \frac{4k^2 (D' - D)}{v^2};$$

also

$$201) \quad \frac{\sin \omega}{\sin \omega'} = \sqrt{1 + \frac{4k^2 (D' - D)}{v^2}}.$$

Weil für jede zwei brechende Media die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in dieser Gleichung offenbar constant ist, so ist

$$\frac{\sin \omega}{\sin \omega'},$$

wie sich auch  $\omega$  und  $\omega'$  selbst ändern mögen, für jede zwei brechende Media eine constante Grösse, welches das bekannte dioptrische Grundgesetz ist.

Bezeichnen wir wie früher auch jetzt wieder den reciproken Brechungsexponenten durch  $\mu$ , so ist bekanntlich

$$\mu = \frac{\sin \omega'}{\sin \omega},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden



$$202) \frac{1}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{4k^2(D' - D)}{v^2}},$$

oder, wenn wir den Brechungsexponenten selbst durch  $\mu_1$  bezeichnen, also

$$203) \mu_1 = \frac{1}{\mu}$$

setzen :

$$204) \mu_1 = \sqrt{1 + \frac{4k^2(D' - D)}{v^2}}.$$

§. 35.

Man denke sich jetzt einen Lichtstrahl aus dem leeren Raume in das Medium  $A$  von der Dichtigkeit  $D$ , und aus diesem in das Medium  $B$  von der Dichtigkeit  $D'$  übergehend. Die Brechungsexponenten für den leeren Raum und das Medium  $A$ , und für den leeren Raum und das Medium  $B$ , seien respective  $\lambda$  und  $\lambda'$ ; so ist nach 204), wenn die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raume durch  $\mathfrak{V}$  bezeichnet wird, weil die Dichtigkeit des leeren Raumes natürlich als verschwindend zu betrachten ist,

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{4k^2}{\mathfrak{V}^2} D}, \quad \lambda' = \sqrt{1 + \frac{4k^2}{\mathfrak{V}^2} D'}$$

oder, wenn wir die positive Constante  $\frac{4k^2}{\mathfrak{V}^2}$  durch  $K$  bezeichnen, also

$$205) K = \frac{4k^2}{\mathfrak{V}^2}$$

setzen,

$$\lambda = \sqrt{1 + KD}, \quad \lambda' = \sqrt{1 + KD'};$$

folglich

$$\lambda^2 = 1 + KD, \quad \lambda'^2 = 1 + KD';$$

also

$$\lambda'^2 - \lambda^2 = K(D' - D),$$

und daher

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = 1 + \frac{K(D' - D)}{\lambda^2}.$$

Nun ist aber nach der ersten der beiden Gleichungen 200), wenn jetzt  $w$  und  $\omega$  die von den Strahlen im leeren Raume und



im Medio  $A$  mit dem Einfallslothe eingeschlossenen Winkel bezeichnen,

$$\mathfrak{B} \sin w = v \sin \omega,$$

also

$$\frac{\sin w}{\sin \omega} = \frac{v}{\mathfrak{B}},$$

und folglich, weil

$$\lambda = \frac{\sin w}{\sin \omega}$$

ist,

$$\lambda = \frac{v}{\mathfrak{B}}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = 1 + \frac{K \mathfrak{B}^2 (D' - D)}{v^2}.$$

Nach 205) ist aber

$$K \mathfrak{B}^2 = 4k^2.$$

Also ist

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2} = 1 + \frac{4k^2 (D' - D)}{v^2}.$$

Nun ist aber nach 204) auch

$$\mu_1^2 = 1 + \frac{4k^2 (D' - D)}{v^2}.$$

Also ist

$$206) \mu_1 = \frac{\lambda'}{\lambda},$$

oder nach 203)

$$207) \mu = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$\lambda = \sqrt{1 + KD}, \lambda' = \sqrt{1 + KD'}$$

ist, so ist

$$208) \mu = \frac{\sqrt{1 + KD}}{\sqrt{1 + KD'}}$$

und

$$209) \mu_1 = \frac{\sqrt{1 + KD'}}{\sqrt{1 + KD}}.$$



Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich auch leicht:

$$210) \begin{cases} D - \mu^2 D' = \frac{\mu^2 - 1}{K}, \\ D' - \mu_1^2 D = \frac{\mu_1^2 - 1}{K}; \end{cases}$$

also

$$211) \begin{cases} D = \mu^2 D' + \frac{\mu^2 - 1}{K}, \\ D = \mu_1^2 \{ D' - \frac{\mu_1^2 - 1}{K} \}; \end{cases}$$

und

$$212) \begin{cases} D' = \mu_1^2 D + \frac{\mu_1^2 - 1}{K}, \\ D' = \mu_1^2 \{ D - \frac{\mu^2 - 1}{K} \}. \end{cases}$$

Endlich ist auch

$$213) K = \frac{\mu^2 - 1}{D - \mu^2 D'} = \frac{\mu_1^2 - 1}{D' - \mu_1^2 D}.$$

### §. 36.

Es seien jetzt  $A, B, C$  drei brechende Media von den Dichtigkeiten  $D, D', D''$ ; die reciproken Brechungsexponenten für  $A, B$  und  $A, C$  seien  $\mu'$  und  $\mu''$ , und die Brechungsexponenten selbst für  $A, B$  und  $A, C$  seien  $\mu_1'$  und  $\mu_1''$ ; so ist nach 213)

$$K = \frac{\mu_1'^2 - 1}{D' - \mu_1'^2 D}, \quad K = \frac{\mu_1''^2 - 1}{D'' - \mu_1''^2 D};$$

also

$$\frac{\mu_1'^2 - 1}{D' - \mu_1'^2 D} = \frac{\mu_1''^2 - 1}{D'' - \mu_1''^2 D}$$

oder

$$\frac{1 - \mu_1'^2}{1 - \mu_1''^2} = \frac{D' - \mu_1'^2 D}{D'' - \mu_1''^2 D} = \frac{\mu_1'^2 - \frac{D'}{D}}{\mu_1''^2 - \frac{D''}{D}}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich aber leicht



$$214) (1 - \mu_1''^2) \frac{D'}{D} - (1 - \mu_1'^2) \frac{D''}{D} = \mu_1'^2 - \mu_1''^2$$

oder

$$215) (1 - \mu_1'')(1 + \mu_1'') \frac{D'}{D} - (1 - \mu_1')(1 + \mu_1') \frac{D''}{D} = (\mu_1' - \mu_1'')(\mu_1' + \mu_1'').$$

Auch ist offenbar nach 214)

$$\begin{aligned} & (1 - \mu_1''^2) \left(1 - \frac{D'}{D}\right) - (1 - \mu_1'^2) \left(1 - \frac{D''}{D}\right) \\ &= \mu_1''^2 - \mu_1'^2 + (1 - \mu_1''^2) - (1 - \mu_1'^2), \end{aligned}$$

d. i.

$$216) (1 - \mu_1''^2) \left(1 - \frac{D'}{D}\right) - (1 - \mu_1'^2) \left(1 - \frac{D''}{D}\right) = 0,$$

oder

$$217) (1 - \mu_1''^2) \left(1 - \frac{D'}{D}\right) = (1 - \mu_1'^2) \left(1 - \frac{D''}{D}\right),$$

oder

$$218) \frac{1 - \frac{D'}{D}}{1 - \frac{D''}{D}} = \frac{1 - \mu_1'^2}{1 - \mu_1''^2} = \frac{(1 - \mu_1')(1 + \mu_1')}{(1 - \mu_1'')(1 + \mu_1'')},$$

oder

$$219) \frac{D - D'}{D - D''} = \frac{1 - \mu_1'^2}{1 - \mu_1''^2} = \frac{(1 - \mu_1')(1 + \mu_1')}{(1 - \mu_1'')(1 + \mu_1'')}.$$

### §. 37.

Dass sich mittelst der in §. 1. bis §. 31. entwickelten Theorie alle Hapterscheinungen des Regenbogens auf die vollständigste und genügendste Weise erklären lassen, unterliegt keinem Zweifel, und ich wüsste nicht, was diese Theorie in dieser Beziehung noch zu wünschen übrig liesse. Es kommt aber bei dem Regenbogen ausser der Hapterscheinung noch eine secundäre Erscheinung vor, für welche wohl überhaupt noch keine ganz genügende, auf alle möglichen Fragen völlig befriedigende Antwort gebende Erklärung gefunden worden ist, auf so vielfache Weise man dieselbe auch zu geben bereits versucht hat. Ich meine die sogenannten überzähligen Bogen oder die Supernumerar-Bogen, worunter man bekanntlich im Allgemeinen die mehrmaligen, wenigstens theilweisen, Wiederholungen der eigentlichen Regenbogen der verschiedenen Ord-



nungen, die ich von jetzt an die primären, und die überzähligen Bogen die secundären Bogen nennen werde, versteht, von denen die Erscheinung des Regenbogens zwar nicht constant, aber doch meistens, in verschiedener Stärke und abwechselndem Glanze, so wie auch in mehr oder weniger oftmaliger Wiederholung, begleitet ist. Indem ich die Bekanntschaft mit den näheren Umständen dieser Erscheinung hier voraussetze, hebe ich als etwas besonders Wesentliches nur hervor, dass sich diese secundären Bogen immer nur an den Gipfelpunkten der primären Bogen mit vorzüglicher Stärke zeigen, und zu verschiedenen Zeiten mehr oder weniger tief mit successive abnehmendem Glanze bis zum Horizonte hinabreichen.

In neuerer Zeit sind vorzüglich zwei Erklärungsversuche dieser secundären Bogen bekannt geworden, von denen in ganz neuer Zeit wieder vorzugsweise der eine Anerkennung und Aufnahme bei den Physikern gefunden hat, und gegenwärtig eigentlich wohl als der allgemein angenommene betrachtet werden muss, welche allerdings sehr allgemeine Anerkennung indess wohl wenigstens zum Theil in der jetzt mit Recht sehr allgemein verbreiteten Hinneigung der Physiker zu der neueren physikalischen Theorie des Lichts, der sogenannten Undulationstheorie, auf welcher der in Rede stehende Erklärungsversuch hauptsächlich beruht, ihren Grund hat, indem sich doch auch dieser Erklärungsweise der secundären Bogen wohl manche Einwürfe entgegenstellen liessen und in der That auch schon von einigen gründlichen Physikern entgegengestellt worden sind. Ich werde weiter unten diese beiden Erklärungsversuche, welche mir selbst freilich, auch die gegenwärtig fast allgemein recipirte Erklärung nicht ausgeschlossen, noch Manches zu wünschen übrig zu lassen scheinen, so weit es die Natur dieser Abhandlung, und die Principien, welche ich mir der Einleitung zufolge bei deren Abfassung gemacht habe, zulassen, etwas näher besprechen, will aber vorher einen dritten mir eigenthümlichen Erklärungsversuch entwickeln, der wenigstens das Verdienst haben dürfte, dass er nicht, wie namentlich die gegenwärtig fast allgemein von den Physikern angenommene Erklärung, den von Newton bei der Erklärung der Hapterscheinungen des Regenbogens oder der primären Bogen eingeschlagenen Weg bei der Erklärung der secundären Bogen mit einem Male gänzlich verlässt, und die etwas weitere Verfolgung dieses Wegs gleich von vorn herein mit der kurzen Erklärung: „dass die Cartesisch-Newton'sche Theorie von den Supernumerar-Bogen weder rede, noch eine Erklärung zu geben im Stande



sei“ \*) zurückweist und als völlig unfruchtbar darzustellen sucht, sondern sich vielmehr an die Newton'sche Theorie so eng als irgend möglich anschliesst, und eigentlich nur auf dem von diesem grossen Naturforscher mit so vielem Glücke eingeschlagenen Wege noch einige Schritte weiter fortschreitet. Letzteres sollte man aber nach meiner Meinung, wenn sich eine Theorie einer Naturerscheinung wenigstens in den Hauptpunkten so glänzend bewährt hat wie im vorliegenden Falle die Newton'sche Theorie, immer versuchen, bevor man zu ganz neuen Erklärungsgründen seine Zuflucht nimmt. So wenig Werth ich nun aber auch selbst auf die an sich übrigens sehr einfache Erklärung der secundären Bogen lege, welche ich im nächstfolgenden Paragraphen zu geben versuchen werde, die in der That so einfach ist und sich so leicht ganz von selbst ergibt, dass es mich eigentlich misstrauisch gegen dieselbe macht, dass bisher noch kein Physiker, so viel ich weiss, auf dieselbe gefallen ist: so sehr bedaure ich doch auf der andern Seite, dass es bis jetzt an Messungen des Regenbogens, so wie er sich, ohne auf irgend eine Weise künstlich nachgebildet zu sein, in der Wirklichkeit uns darstellt, welche hinreichend genau und umfänglich genug wären, um eine scharfe Prüfung der im nächsten Paragraphen zu gebenden Erklärung der secundären Bogen auf sie gründen zu können, so gut wie gänzlich fehlt, weshalb ich auch nachher meine Ansicht, wie solche Messungen am besten anzustellen und auf dem Wege der Rechnung Resultate aus denselben zu ziehen sein dürften, besonders entwickeln werde, und mir jetzt nur noch den Wunsch auszusprechen erlaube, dass dergleichen Messungen künftig häufiger und mit grösserer Genauigkeit und Schärfe als bisher angestellt werden möchten, wozu ich selbst auch jede sich mir darbietende Gelegenheit benutzen werde. Da der Regenbogen kein periodisch wiederkehrendes Phänomen ist, auch unter verschiedenen Modificationen auftritt, so muss derselbe, wo und wann er auch mit vorzüglichem Glanze und mit vorzüglicher Vollständigkeit sich zeigt, zu genauen Messungen benutzt werden, wozu natürlich das Zusammenwirken einer grösseren Anzahl, mit guten Instrumenten versehener Beobachter an verschiedenen Orten erforderlich ist, wenn man mit der Zeit zu genaueren Resultaten als bisher gelangen will, weshalb ich auch hier die Physiker wiederholt aufzufordern mir erlaube, diesem in mehreren Beziehungen wichtigen Gegenstande künftig die ihm gebührende Aufmerksamkeit mehr als bisher zuzu-

---

\*) Poggendorff's Annalen. Band XXXVII. S. 455.



wenden. Nach diesen vorläufigen Bemerkungen werde ich nun im folgenden Paragraphen meine Ansicht über die secundären Bogen mit möglichster Kürze und Bestimmtheit zu entwickeln suchen.

§. 38.

Wir fassen für jetzt nur einen primären Bogen und die demselben entsprechenden secundären Bogen in's Auge, bemerken aber, dass die folgenden Betrachtungen in gleicher Weise auf jeden primären Bogen mit seinen secundären Bögen anwendbar sind. Ferner fassen wir in dem primären Bogen und seinen secundären Bögen ein und dieselbe bestimmte Farbe in's Auge, und wollen nun annehmen, dass man durch geeignete Messungen, von deren zweckmässigster Anstellung weiter unten die Rede sein wird, für alle diese Bogen den in §. 4. im Allgemeinen durch  $\Theta$  bezeichneten Winkel bestimmt habe. Die auf diese Weise erhaltenen Werthe des im Allgemeinen durch  $\Theta$  bezeichneten Winkels für die verschiedenen gleich gefärbten Bogen wollen wir aber jetzt durch

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5, \dots$$

bezeichnen. Sind dann alle diese gleich gefärbten Bogen auf eine und dieselbe Weise, nämlich sämmtlich auf die von der Newton'schen Theorie angegebene Art, hervorgerufen, so kann man mittelst der in §. 7., §. 8., §. 9. vollständig entwickelten Gleichungen aus den durch Messung erhaltenen Winkeln

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5, \dots$$

die entsprechenden Werthe

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \dots$$

der reciproken Brechungsexponenten für die in Rede stehende Farbe bestimmen. Da nun diese einer und derselben Farbe entsprechenden Brechungsexponenten eben so wie die Winkel, aus denen sie abgeleitet worden sind, von einander verschieden sein müssen, so entsteht jetzt die Frage, welches der Grund dieser Verschiedenheit ist. Auf diese Frage lässt sich aber, wenn man die Newton'sche Theorie, wie hier beabsichtigt wird, mit möglichster Consequenz durchführen will, keine andere Antwort geben, als dass in der Atmosphäre Regentropfen vorhanden sein müssen, welche das gleich gefärbte Licht auf verschiedene Art brechen, oder welche eine verschiedene Brechkraft besitzen. Da nun aber nach der in §. 32. bis §. 36. entwickelten physikalischen Theorie des Lichts die Verschiedenheit der Brechkraft der brechenden Mittel lediglich und einzig und allein durch ihre verschiedene Dichtigkeit bedingt wird,



so kann die Verschiedenheit der einer und derselben Farbe entsprechenden Brechungsexponenten, und also natürlich auch die damit unmittelbar zusammenhängende Wiederholung der Bogen, durch nichts Anderes als dadurch herbeigeführt werden, dass sich in der Atmosphäre Regentropfen von verschiedener Dichtigkeit befinden, indem wir bei der schon im vorhergehenden Paragraphen erwähnten geringen Ausdehnung der secundären Bogen von der durch die verschiedene Höhe bedingten Verschiedenheit der Dichtigkeit der Luft absehen zu dürfen hier wohl vollständig berechtigt sind. Wirft man nun aber, wie billig, ferner die Frage auf, woher es komme, dass sich die secundären Bogen nur hauptsächlich an den Gipfelpunkten der primären Bogen zeigen, so kann diese Frage nicht anders beantwortet werden, als dadurch, dass nur in den höheren Regionen der Atmosphäre, ausser den in bedeutender Anzahl vorherrschenden und bis zur Erde hinabreichenden Tropfen von gleicher Dichtigkeit, noch Tropfen von davon verschiedenen Dichtigkeiten vorkommen, indem eben durch das Herabfallen der Tropfen sich die Dichtigkeit derselben, etwa wenn sie in wärmere Regionen kommen, nach und nach ausgleicht, woraus sich denn unmittelbar und ganz von selbst ergibt, dass näher nach dem Horizonte hinab sich keine secundären Bogen mehr zeigen können. Hiermit glauben wir aber die Erklärung der secundären Bogen erledigt und zu Ende geführt zu haben, denn wenn auch freilich der Physiker jetzt noch zu fragen berechtigt ist, woher die Tropfen von verschiedener Dichtigkeit in der Atmosphäre kommen und wie dieselben entstehen, so müssen wir diese Frage doch als nicht hierher gehörend zurückweisen, indem die Beantwortung derselben lediglich von der Art und Weise der Entstehung des Regens in den höheren Regionen der Atmosphäre abhängt, über die wir freilich noch sehr im Unklaren sind; und so lange dieser Vorgang in der Natur nicht vollständig aufgeklärt ist, glauben wir uns berechtigt halten zu dürfen, den Speer, wie man wohl zu sagen pflegt, umzukehren, und zu behaupten, dass vielmehr die obige Erklärung der secundären Bogen auf gewisse Vorgänge bei der Regenbildung hinweise, die bisher vielleicht noch nicht alle verdiente Beachtung gefunden haben. Je weniger es hier der Ort ist, auf die Bildung und Entstehung des Regens weiter einzugehen, desto mehr halten wir uns für berechtigt, die Beantwortung der vorhergehenden Frage, als der Lichtlehre ganz fremd, an die eigentliche Meteorologie zu verweisen, und wünschen sehr, über dieselbe von irgend einer Seite her bald genügende Aufklärung zu erhalten. Dass die obige an



sich höchst einfache Erklärung namentlich bei den unmathematischen Physikern Widerspruch finden wird, bin ich im Voraus überzeugt, weiss auch vorher, dass man ihr nach einem beliebigen Ausdrucke hauptsächlich eine zu geringe Berücksichtigung und Aufklärung des eigentlich Physikalischen bei der betreffenden Naturerscheinung vorwerfen wird. Ich glaube aber dessenungeachtet, dass dieselbe sich durch ihre Einfachheit, durch die Consequenz ihrer Durchführung, und namentlich auch dadurch wohl einigermaßen empfiehlt, dass sie sich mit der Newton'schen Theorie, indem man in derselben eigentlich nur einige Schritte weiter geht, in unmittelbaren Zusammenhang bringen und an dieselbe unmittelbar anschliessen lässt, ohne zu dieser Theorie an sich ganz fremden Thatsachen seine Zuflucht nehmen zu müssen, möchte derselben daher auch allerdings einige Berücksichtigung und weitere Prüfung wünschen, weshalb ich nun, um für die letztere einige Anhaltspunkte darzubieten, dem Obigen noch die folgenden Bemerkungen beifügen will, wobei ich nur mein wiederholtes Bedauern auszusprechen nicht unterlassen kann, dass es an hinreichend genauen Beobachtungen und Messungen, welche als Grundlage einer solchen Prüfung benutzt werden könnten, gegenwärtig noch so gut wie ganz fehlt.

Wenn wir die auf die aus dem Vorhergehenden ersichtliche Weise bestimmten reciproken Brechungsexponenten für die verschiedenen farbigen Bogen jetzt durch

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4, & \mu_5, \dots; \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4, & \mu_5, \dots; \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, & \mu_4, & \mu_5, \dots; \\ & \text{u. s. w.} \end{array}$$

wo die Anzahl dieser Reihen natürlich sieben nie übersteigen kann, und die entsprechenden Dichtigkeiten der Regentropfen durch

$$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, \dots$$

die Dichtigkeit der Luft aber durch  $D$  bezeichnen; so haben wir nach 217) die folgenden Gleichungen:

$$(1 - \mu_2^2) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^2) \left(1 - \frac{D_2}{D}\right),$$

$$(1 - \mu_3^2) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^2) \left(1 - \frac{D_3}{D}\right),$$



$$(1 - \mu_4^1) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^1) \left(1 - \frac{D_4}{D}\right),$$

u. s. w.

ferner

$$(1 - \mu_2^2) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^2) \left(1 - \frac{D_2}{D}\right),$$

$$(1 - \mu_3^2) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^2) \left(1 - \frac{D_3}{D}\right),$$

$$(1 - \mu_4^2) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^2) \left(1 - \frac{D_4}{D}\right),$$

u. s. w.

ferner

$$(1 - \mu_2^3) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^3) \left(1 - \frac{D_2}{D}\right),$$

$$(1 - \mu_3^3) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^3) \left(1 - \frac{D_3}{D}\right),$$

$$(1 - \mu_4^3) \left(1 - \frac{D_1}{D}\right) = (1 - \mu_1^3) \left(1 - \frac{D_4}{D}\right),$$

u. s. w.

ferner

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich aber, wie man leicht findet:

$$\frac{1 - \mu_1^1}{1 - \mu_2^1} = \frac{1 - \mu_1^2}{1 - \mu_2^2} = \frac{1 - \mu_1^3}{1 - \mu_2^3} = \frac{1 - \mu_1^4}{1 - \mu_2^4} = \dots,$$

$$\frac{1 - \mu_1^1}{1 - \mu_3^1} = \frac{1 - \mu_1^2}{1 - \mu_3^2} = \frac{1 - \mu_1^3}{1 - \mu_3^3} = \frac{1 - \mu_1^4}{1 - \mu_3^4} = \dots,$$

$$\frac{1 - \mu_1^1}{1 - \mu_4^1} = \frac{1 - \mu_1^2}{1 - \mu_4^2} = \frac{1 - \mu_1^3}{1 - \mu_4^3} = \frac{1 - \mu_1^4}{1 - \mu_4^4} = \dots,$$

u. s. w.

Dies sind die Bedingungsgleichungen, welche nothwendig erfüllt sein müssen, wenn unsere oben aufgestellte Hypothese richtig sein soll, und



die mehr oder weniger genaue Erfüllung dieser Bedingungsgleichungen kann daher auch umgekehrt als ein Kriterium für die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese dienen.

Man würde die Prüfung unserer Hypothese noch auf verschiedene andere Arten vornehmen können, dabei sich aber immer der in §. 32. bis §. 36. entwickelten Formeln bedienen müssen. Jedoch scheint mir die obige Methode meinem gegenwärtigen Zwecke am besten zu entsprechen, und ich glaube jetzt diesen Gegenstand um so mehr verlassen zu dürfen, weil es, wie schon mehrmals erwähnt worden ist, zur Zeit noch ganz an hinreichend genauen Beobachtungen und Messungen fehlt, welche einer Prüfung von der Art der obigen mit einiger Sicherheit zum Grunde gelegt werden könnten. Wie aber nach meiner Ansicht solche Beobachtungen und Messungen am besten anzustellen sein dürften, soll nun zuvörderst in den beiden nächstfolgenden Paragraphen gezeigt werden.

### §. 39.

Wir wollen zuerst die folgende geometrische Aufgabe auflösen:

Drei von einem und demselben Punkte ausgehende gerade Linien im Raume seiender Lage nach gegeben; man soll eine gerade Kegelfläche bestimmen, deren Scheitel oder Spitze der in Rede stehende Punkt ist, und welche durch die drei gegebenen geraden Linien hindurch geht.

Um diese Aufgabe aufzulösen, nehme man den Punkt, von welchem die drei gegebenen geraden Linien ausgehen, nach den Bedingungen der Aufgabe also den Scheitel oder die Spitze der gesuchten Kegelfläche, als Anfang eines beliebigen rechtwinkligen Coordinatensystems der  $xyz$  an, und bezeichne die  $180^\circ$  nicht übersteigenden Winkel, welche die drei gegebenen geraden Linien mit den positiven Theilen der Axen der

$$x, y, z$$

einschliessen, respective durch

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;$$

$$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2;$$

$$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3.$$

Ferner seien  $\varphi, \psi, \chi$  die  $180^\circ$  nicht übersteigenden Winkel, welche die als eine von dem Anfange der Coordinaten oder von dem Scheitel der gesuchten Kegelfläche ausgehende gerade Linie



gedachte Axe der Kegelfläche mit den positiven Theilen der Axen der  $x, y, z$  einschliesst, und  $\omega$  sei der ebenfalls  $180^\circ$  nicht übersteigende Winkel, welchen die Axe der gesuchten Kegelfläche mit den drei gegebenen geraden Linien einschliesst, indem nach der Natur der geraden Kegelfläche bekanntlich die Axe gegen die drei gegebenen geraden Linien unter gleichen Winkeln geneigt sein muss. Dies vorausgesetzt, liefert uns ein bekannter Satz der analytischen Geometrie auf der Stelle die drei folgenden Gleichungen:

$$\cos \omega = \cos \alpha_1 \cos \varphi + \cos \beta_1 \cos \psi + \cos \gamma_1 \cos \chi,$$

$$\cos \omega = \cos \alpha_2 \cos \varphi + \cos \beta_2 \cos \psi + \cos \gamma_2 \cos \chi,$$

$$\cos \omega = \cos \alpha_3 \cos \varphi + \cos \beta_3 \cos \psi + \cos \gamma_3 \cos \chi;$$

zu denen dann noch die bekannte Gleichung

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 \psi + \cos^2 \chi = 1$$

kommt. Aus diesen vier Gleichungen müssen die vier unbekannten Grössen  $\varphi, \psi, \chi$  und  $\omega$  bestimmt werden.

Multiplizieren wir zu dem Ende die drei ersten Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos \beta_2 \cos \gamma_3 - \cos \beta_3 \cos \gamma_2,$$

$$\cos \beta_3 \cos \gamma_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma_3,$$

$$\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1;$$

und addiren sie dann zu einander, so erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & (\cos \beta_2 \cos \gamma_3 - \cos \beta_3 \cos \gamma_2) \\ & + (\cos \beta_3 \cos \gamma_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma_3) \\ & + (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1) \end{aligned} \right\} \cos \omega \\ & = \left\{ \begin{aligned} & \cos \alpha_1 (\cos \beta_2 \cos \gamma_3 - \cos \beta_3 \cos \gamma_2) \\ & + \cos \alpha_2 (\cos \beta_3 \cos \gamma_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma_3) \\ & + \cos \alpha_3 (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1) \end{aligned} \right\} \cos \varphi, \end{aligned}$$

und auf ganz ähnliche Art, oder auch bloss mittelst gehöriger Vertauschung der Zeichen ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} & (\cos \gamma_2 \cos \alpha_3 - \cos \gamma_3 \cos \alpha_2) \\ & + (\cos \gamma_3 \cos \alpha_1 - \cos \gamma_1 \cos \alpha_3) \\ & + (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) \end{aligned} \right\} \cos \omega$$



$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_1 (\cos \gamma_2 \cos \alpha_3 - \cos \gamma_3 \cos \alpha_2) \\ + \cos \beta_2 (\cos \gamma_3 \cos \alpha_1 - \cos \gamma_1 \cos \alpha_3) \\ + \cos \beta_3 (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) \end{array} \right\} \cos \psi,$$

und

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos \alpha_2 \cos \beta_3 - \cos \alpha_3 \cos \beta_2) \\ + (\cos \alpha_3 \cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_3) \\ + (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1) \end{array} \right\} \cos \omega$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma_1 (\cos \alpha_2 \cos \beta_3 - \cos \alpha_3 \cos \beta_2) \\ + \cos \gamma_2 (\cos \alpha_3 \cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_3) \\ + \cos \gamma_3 (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1) \end{array} \right\} \cos \chi.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$220) \left\{ \begin{array}{l} K_1 = \cos \beta_2 \cos \gamma_3 - \cos \beta_3 \cos \gamma_2, \\ K_2 = \cos \beta_3 \cos \gamma_1 - \cos \beta_1 \cos \gamma_3, \\ K_3 = \cos \beta_1 \cos \gamma_2 - \cos \beta_2 \cos \gamma_1; \\ \\ L_1 = \cos \gamma_2 \cos \alpha_3 - \cos \gamma_3 \cos \alpha_2, \\ L_2 = \cos \gamma_3 \cos \alpha_1 - \cos \gamma_1 \cos \alpha_3, \\ L_3 = \cos \gamma_1 \cos \alpha_2 - \cos \gamma_2 \cos \alpha_1; \\ \\ M_1 = \cos \alpha_2 \cos \beta_3 - \cos \alpha_3 \cos \beta_2, \\ M_2 = \cos \alpha_3 \cos \beta_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_3, \\ M_3 = \cos \alpha_1 \cos \beta_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_1; \end{array} \right.$$

ferner

$$221) \left\{ \begin{array}{l} K = K_1 + K_2 + K_3, \\ L = L_1 + L_2 + L_3, \\ M = M_1 + M_2 + M_3; \end{array} \right.$$

und

$$222) \begin{aligned} N &= K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2 + K_3 \cos \alpha_3 \\ &= L_1 \cos \beta_1 + L_2 \cos \beta_2 + L_3 \cos \beta_3 \\ &= M_1 \cos \gamma_1 + M_2 \cos \gamma_2 + M_3 \cos \gamma_3, \end{aligned}$$

nämlich

$$223) \begin{aligned} N &= \cos \alpha_1 \cos \beta_2 \cos \gamma_3 \\ &\quad - \cos \alpha_1 \cos \gamma_2 \cos \beta_3 \\ &\quad - \cos \beta_1 \cos \alpha_2 \cos \gamma_3 \\ &\quad + \cos \beta_1 \cos \gamma_2 \cos \alpha_3 \\ &\quad + \cos \gamma_1 \cos \alpha_2 \cos \beta_3 \\ &\quad - \cos \gamma_1 \cos \beta_2 \cos \alpha_3; \end{aligned}$$



so werden die obigen Gleichungen:

$$224) \begin{cases} K \cos \omega = N \cos \varphi, \\ L \cos \omega = N \cos \psi, \\ M \cos \omega = N \cos \chi. \end{cases}$$

Quadrirt man diese Gleichungen, und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung

$$(K^2 + L^2 + M^2) \cos^2 \omega = N^2,$$

also

$$225) \cos \omega = \pm \frac{N}{\sqrt{K^2 + L^2 + M^2}},$$

und folglich nach 224), indem in allen Gleichungen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$226) \begin{cases} \cos \varphi = \frac{K}{N} \cos \omega = \pm \frac{K}{\sqrt{K^2 + L^2 + M^2}}, \\ \cos \psi = \frac{L}{N} \cos \omega = \pm \frac{L}{\sqrt{K^2 + L^2 + M^2}}, \\ \cos \chi = \frac{M}{N} \cos \omega = \pm \frac{M}{\sqrt{K^2 + L^2 + M^2}}. \end{cases}$$

Weil nach dem Obigen

$$\begin{aligned} K = & \cos \beta_1 (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_3) = \cos \gamma_1 (\cos \beta_3 - \cos \beta_2) \\ & + \cos \beta_2 (\cos \gamma_3 - \cos \gamma_1) + \cos \gamma_2 (\cos \beta_1 - \cos \beta_3) \\ & + \cos \beta_3 (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) + \cos \gamma_3 (\cos \beta_2 - \cos \beta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = & \cos \gamma_1 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_3) = \cos \alpha_1 (\cos \gamma_3 - \cos \gamma_2) \\ & + \cos \gamma_2 (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_1) + \cos \alpha_2 (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_3) \\ & + \cos \gamma_3 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) + \cos \alpha_3 (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = & \cos \alpha_1 (\cos \beta_2 - \cos \beta_3) = \cos \beta_1 (\cos \alpha_3 - \cos \alpha_2) \\ & + \cos \alpha_2 (\cos \beta_3 - \cos \beta_1) + \cos \beta_2 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_3) \\ & + \cos \alpha_3 (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) + \cos \beta_3 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \end{aligned}$$

ist, so erhält man für diese Grössen auch leicht die folgenden Ausdrücke:



$$\begin{aligned}
 227) \quad K &= -2 \cos \beta_1 \sin^{1/2}(\gamma_2 + \gamma_3) \sin^{1/2}(\gamma_2 - \gamma_3) \\
 &\quad - 2 \cos \beta_2 \sin^{1/2}(\gamma_3 + \gamma_1) \sin^{1/2}(\gamma_3 - \gamma_1) \\
 &\quad - 2 \cos \beta_3 \sin^{1/2}(\gamma_1 + \gamma_2) \sin^{1/2}(\gamma_1 - \gamma_2) \\
 &= 2 \cos \gamma_1 \sin^{1/2}(\beta_2 + \beta_3) \sin^{1/2}(\beta_2 - \beta_3) \\
 &\quad + 2 \cos \gamma_2 \sin^{1/2}(\beta_3 + \beta_1) \sin^{1/2}(\beta_3 - \beta_1) \\
 &\quad + 2 \cos \gamma_3 \sin^{1/2}(\beta_1 + \beta_2) \sin^{1/2}(\beta_1 - \beta_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L &= -2 \cos \gamma_1 \sin^{1/2}(\alpha_2 + \alpha_3) \sin^{1/2}(\alpha_2 - \alpha_3) \\
 &\quad - 2 \cos \gamma_2 \sin^{1/2}(\alpha_3 + \alpha_1) \sin^{1/2}(\alpha_3 - \alpha_1) \\
 &\quad - 2 \cos \gamma_3 \sin^{1/2}(\alpha_1 + \alpha_2) \sin^{1/2}(\alpha_1 - \alpha_2) \\
 &= 2 \cos \alpha_1 \sin^{1/2}(\gamma_2 + \gamma_3) \sin^{1/2}(\gamma_2 - \gamma_3) \\
 &\quad + 2 \cos \alpha_2 \sin^{1/2}(\gamma_3 + \gamma_1) \sin^{1/2}(\gamma_3 - \gamma_1) \\
 &\quad + 2 \cos \alpha_3 \sin^{1/2}(\gamma_1 + \gamma_2) \sin^{1/2}(\gamma_1 - \gamma_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M &= -2 \cos \alpha_1 \sin^{1/2}(\beta_2 + \beta_3) \sin^{1/2}(\beta_2 - \beta_3) \\
 &\quad - 2 \cos \alpha_2 \sin^{1/2}(\beta_3 + \beta_1) \sin^{1/2}(\beta_3 - \beta_1) \\
 &\quad - 2 \cos \alpha_3 \sin^{1/2}(\beta_1 + \beta_2) \sin^{1/2}(\beta_1 - \beta_2) \\
 &= 2 \cos \beta_1 \sin^{1/2}(\alpha_2 + \alpha_3) \sin^{1/2}(\alpha_2 - \alpha_3) \\
 &\quad + 2 \cos \beta_2 \sin^{1/2}(\alpha_3 + \alpha_1) \sin^{1/2}(\alpha_3 - \alpha_1) \\
 &\quad + 2 \cos \beta_3 \sin^{1/2}(\alpha_1 + \alpha_2) \sin^{1/2}(\alpha_1 - \alpha_2).
 \end{aligned}$$

Berechnet man die Grössen  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  nach einer bekannten Methode mittelst der drei Gleichungen

$$228) \quad \begin{cases} K = R \cos P \cos Q, \\ L = R \sin P \cos Q, \\ M = R \sin Q; \end{cases}$$

und macht dabei, was bekanntlich immer möglich ist,  $R$  positiv, so ist, wie man leicht findet,

$$R = \sqrt{K^2 + L^2 + M^2},$$

also nach dem Obigen

$$229) \quad \cos \omega = \pm \frac{N}{R}$$

und



$$230) \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \pm \frac{K}{R} = \pm \cos P \cos Q, \\ \cos \psi = \pm \frac{L}{R} = \pm \sin P \cos Q, \\ \cos \chi = \pm \frac{M}{R} = \pm \sin Q; \end{array} \right.$$

wo überall die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.

Für  $4N$  erhält man aus 223) auch leicht den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} 231) \quad 4N = & \cos(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - \cos(\alpha_1 + \beta_3 + \gamma_2) \\ & + \cos(-\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) - \cos(-\alpha_1 + \beta_3 + \gamma_2) \\ & + \cos(\alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3) - \cos(\alpha_1 - \beta_3 + \gamma_2) \\ & + \cos(\alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3) - \cos(\alpha_1 + \beta_3 - \gamma_2) \\ & + \cos(\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_1) - \cos(\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_3) \\ & + \cos(-\alpha_2 + \beta_3 + \gamma_1) - \cos(-\alpha_2 + \beta_1 + \gamma_3) \\ & + \cos(\alpha_2 - \beta_3 + \gamma_1) - \cos(\alpha_2 - \beta_1 + \gamma_3) \\ & + \cos(\alpha_2 + \beta_3 - \gamma_1) - \cos(\alpha_2 + \beta_1 - \gamma_3) \\ & + \cos(\alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2) - \cos(\alpha_3 + \beta_2 + \gamma_1) \\ & + \cos(-\alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2) - \cos(-\alpha_3 + \beta_2 + \gamma_1) \\ & + \cos(\alpha_3 - \beta_1 + \gamma_2) - \cos(\alpha_3 - \beta_2 + \gamma_1) \\ & + \cos(\alpha_3 + \beta_1 - \gamma_2) - \cos(\alpha_3 + \beta_2 - \gamma_1), \end{aligned}$$

woraus sich nach bekannten goniometrischen Sätzen leicht noch andere Ausdrücke herleiten lassen würden, bei denen wir aber nicht länger verweilen.

Dass im vorliegenden Falle den doppelten Zeichen in den obigen Formeln nicht zwei verschiedene Auflösungen unserer Aufgabe entsprechen, braucht wohl kaum noch besonders bemerkt zu werden.

#### §. 40.

Bei den Messungen des Regenbogens bedient man sich nun, wie es mir scheint, am besten eines Theodoliten, welcher vorher genau berichtigt und an einem geeigneten Orte, der eine möglichst freie Aussicht darbietet, ein für alle Mal richtig aufgestellt werden muss, damit man ihn sogleich gebrauchen kann, wenn ein Regen-



bogen sich zeigt, indem man natürlich nicht erst mit der Aufstellung des Instruments eine längere Zeit verstreichen lassen darf. Mit diesem Theodoliten, dessen Mittelpunkt wir durch  $O$  bezeichnen wollen, messe man nun in drei Azimuthen  $U_1, U_2, U_3$ , die von einem beliebigen Punkte  $A$  des Horizonts an gezählt werden können und natürlich auch mit dem Theodoliten gemessen werden müssen, die diesen Azimuthen entsprechenden Höhen  $h_1, h_2, h_3$  des Regenbogens, und bestimme mittelst einer Uhr die Zeiten  $t_1 < t_2 < T_3$ , wo diese Höhen gemessen wurden; dann führe man das Fernrohr wieder auf das Azimuth  $U_1$ , messe die entsprechende Höhe  $h_1'$  des Regenbogens, und bestimme die Zeit  $t_1'$  an der Uhr; endlich führe man das Fernrohr auch wieder auf das Azimuth  $U_2$ , messe die entsprechende Höhe  $h_2'$  des Regenbogens, und bestimme die Zeit  $t_2'$  an der Uhr. Weil nun für das Azimuth  $U_1$  in der Zeit  $t_1' - t_1$  die Höhe  $h_1$  des Regenbogens die Aenderung  $h_1' - h_1$  erleidet, so ist das vierte Glied der Proportion

$$t_1' - t_1 : T_3 - t_1 = h_1' - h_1 : \frac{T_3 - t_1}{t_1' - t_1} (h_1' - h_1)$$

wenigstens näherungsweise und desto genauer, je kleiner die Zeitintervalle sind, die Aenderung, welche für das Azimuth  $U_1$  die Höhe  $h_1$  des Regenbogens in der Zeit  $T_3 - t_1$  erleidet, und bezeichnen wir also für das Azimuth  $U_1$  die Höhe des Regenbogens zur Zeit  $T_3$  durch  $H_1$ , so ist

$$H_1 = h_1 + \frac{T_3 - t_1}{t_1' - t_1} (h_1' - h_1).$$

Weil auf ganz ähnliche Weise für das Azimuth  $U_2$  in der Zeit  $t_2' - t_2$  die Höhe  $h_2$  des Regenbogens die Aenderung  $h_2' - h_2$  erleidet, so ist das vierte Glied der Proportion

$$t_2' - t_2 : T_3 - t_2 = h_2' - h_2 : \frac{T_3 - t_2}{t_2' - t_2} (h_2' - h_2)$$

wenigstens näherungsweise und desto genauer, je kleiner die Zeitintervalle sind, die Aenderung, welche für das Azimuth  $U_2$  die Höhe  $h_2$  des Regenbogens in der Zeit  $T_3 - t_2$  erleidet, und bezeichnen wir also für das Azimuth  $U_2$  die Höhe des Regenbogens zur Zeit  $T_3$  durch  $H_2$ , so ist

$$H_2 = h_2 + \frac{T_3 - t_2}{t_2' - t_2} (h_2' - h_2).$$



Auf diese Weise erhalten wir also die den gemessenen Azimuthen  $U_1, U_2, U_3$  entsprechenden, auf einerlei Zeitpunkt  $T_3$  reducirten Höhen  $H_1, H_2, H_3$  des Regenbogens, wobei sich von selbst versteht, dass man bei diesen Beobachtungen immer einzelne bestimmte farbige Bogen auswählen, und auf dieselben die Messungen beziehen muss.

Aus den gemessenen Winkeln

$$U_1, H_1; \quad U_2, H_2; \quad U_3, H_3$$

kann man nun aber die im vorhergehenden Paragraphen durch

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

bezeichneten Winkel mittelst der folgenden leicht zu beweisenden Formeln berechnen:

$$232) \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha_1 = \cos U_1 \cos H_1, \\ \cos \beta_1 = \sin U_1 \cos H_1, \\ \cos \gamma_1 = \sin H_1; \\ \\ \cos \alpha_2 = \cos U_2 \cos H_2, \\ \cos \beta_2 = \sin U_2 \cos H_2, \\ \cos \gamma_2 = \sin H_2; \\ \\ \cos \alpha_3 = \cos U_3 \cos H_3, \\ \cos \beta_3 = \sin U_3 \cos H_3, \\ \cos \gamma_3 = \sin H_3. \end{array} \right.$$

Welches Coordinatensystem hierbei zum Grunde gelegt worden ist, wird leicht erhellen. Die Linie  $OA$  ist der positive Theil der Axe der  $x$ ; der positive Theil der Axe der  $y$  liegt, auf  $OA$  senkrecht stehend, im Horizonte von  $OA$  aus nach derselben Seite hin, nach welcher von  $OA$  an die Azimuthe gezählt worden sind; der positive Theil der Axe der  $z$  ist nach dem Zenith gerichtet.

Hat man nun aber auf diese Weise die Winkel

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

gefunden, so lassen sich die Winkel  $\varphi, \psi, \chi$  und  $\omega$  mittelst der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln berechnen.

Leicht wird endlich erhellen, dass sich aus dem Winkel  $\omega$ , den wir, was nach dem Obigen offenbar verstattet ist, als einen spitzen Winkel annehmen wollen, immer der in §. 4. durch  $\Theta$  bezeichnete Winkel unmittelbar ergibt, indem z. B. für den Hauptregenbogen, welchen man natürlich seines grösseren Glanzes wegen bei der-



gleichen Messung immer vorzugsweise anwenden wird,  $\Theta = -\omega$  ist, wobei man sich nur an die aus §. 4. bekannte Bedeutung von  $\Theta$  erinnern muss.

Wenn auch die im Vorhergehenden erläuterte Beobachtungsmethode allerdings etwas weitläufig ist, und zugleich längere Rechnungen erfordert, so scheint mir dieselbe doch allein hinreichend genaue Resultate herbeiführen zu können geeignet zu sein. Auch muss ich es als einen besondern Vorzug derselben betrachten, dass sie die Kenntniss der Höhe der Sonne gar nicht erfordert, und also dem Beobachter den Besitz einer genau berichtigten Uhr, welche auch, wenn es auf wirkliche astronomische Bestimmungen ankäme, natürlich nur ein eigentlicher Chronometer sein könnte, völlig entbehrlich macht. Solche genaue und kostspielige astronomische Instrumente und die Fähigkeit, dieselben durch Beobachtungen am Himmel gehörig zu berichtigen, so wie auch hinreichende Uebung in astronomischen Rechnungen, werden wohl schwerlich immer denen zu Gebote stehen, welche sich gern mit der Beobachtung des Regenbogens und anderer optischer Erscheinungen in der Atmosphäre beschäftigen möchten.

Leichter als vorher gelehrt worden ist kann man freilich zum Ziele gelangen, wenn man bloss die Höhe des höchsten Punktes des Regenbogens misst, die Zeit der Messung an einem genau berichtigten Chronometer beobachtet, und die entsprechende Höhe der Sonne mit Hülfe der als bekannt vorausgesetzten geographischen Länge und Breite des Beobachtungsortes aus den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden berechnet, wozu in astronomischen Lehrbüchern die weitere Anleitung zu suchen ist. Bezeichnen wir dann die Höhe des höchsten Punktes des Regenbogens durch  $H$  und die aus den astronomischen Tafeln oder Ephemeriden berechnete entsprechende Höhe der Sonne durch  $\mathcal{S}$ , so ist offenbar

$$\omega = H + \mathcal{S}.$$

Wenn man  $\mathcal{S}$  auf den Mittelpunkt der Sonne bezieht, so ist auch mit dem Theodoliten jederzeit auf die Mitte des beobachteten farbigen Bogens an seinem Gipfel zu pointiren, was überdies auch in mehreren Beziehungen, z. B. wegen des grössten Glanzes der Bogen in ihrer Mitte, immer das Beste sein wird. So leicht und einfach diese Methode auch auf den ersten Anblick scheint, so setzt sie doch Bedingungen voraus, deren Erfüllung für viele Beobachter, wenn dieselben auch mit guten Theodoliten versehen sind, nicht leicht, ja selbst nicht selten völlig unmöglich sein möchte. Die im ersten Theile dieses Paragraphen gelehrt Methode erfordert da-



gegen nur den Gebrauch eines Theodoliten und einer gewöhnlichen, nur Secunden zeigenden Taschenuhr, die gar nicht astronomisch genau berichtet zu sein braucht, und nimmt überdies gar keine astronomischen Kenntnisse und Uebung in astronomischen Rechnungen und dem Gebrauche der astronomischen Tafeln in Anspruch. Allenfalls könnte man freilich bei der zweiten Methode auch die Höhe der Sonne durch unmittelbare Messung bestimmen, was aber doch in mancher Rücksicht nicht rathsam sein möchte.

#### §. 41.

Zum Schluss diessr Abhandlung will ich nun noch in der Kürze die von andern Physikern gegebenen Erklärungen der secundären oder überzähligen Regenbogen erwähnen.

In vorzüglichem Ansehen hat längere Zeit die von Venturi in seinen *Commentari sopra la Storia e le Teorie dell' Ottica*. Bologna. 1814. gegebene, besonders durch Brandes in dem in Gilbert's *Annalen der Physik*. Band LII. Leipzig. 1816. S. 385. abgedruckten Aufsatz: Venturi's Theorie des farbigen Bogens, welcher sich oft an der innern Seite des Regenbogens zeigt, dargestellt mit einigen Anmerkungen von H. W. Brandes empfohlene Erklärung gestanden. Späterhin hat jedoch Brandes diese Theorie wohl grösstentheils aufgegeben, und spricht sich z. B. in seinem neuesten Werke: *Vorlesungen über die Naturlehre für Leser, denen es an mathematischen Vorkenntnissen fehlt*, von H. W. Brandes. Zweite vermehrte und verbesserte Ausgabe, besorgt von C. W. H. Brandes und W. I. H. Michaelis. Leipzig. 1844. S. 498. auf folgende Art über dieselbe aus.

„Venturi hat diese Erscheinung aus einer abgeplatteten Form der Regentropfen erklärt, indem er ganz richtig zeigt, dass Tropfen, die mehr breit als hoch sind, einen niedrigern Farbenbogen darstellen müssen; aber so richtig dieses ist, so müsste man, wie es mir scheint, Regentropfen von so vielen bestimmten Formen, als es die Anzahl dieser wiederholten Bogen fordert, annehmen, und dürfte nicht zugestehen, dass zwischen ihnen Uebergänge statt fänden; dieses scheint jedoch um so minder glaublich, da es ausser den Kugeltropfen, die den Hauptbogen darstellen, wenigstens noch zwei andere bestimmte Formen geben müsste, um die zwei so oft deutlich sichtbaren Farbenwiederholungen zu geben. Möglich wäre es übrigens, dass die durch den Widerstand der



Luft bestimmte Gestalt der Regentropfen einen Grund für die zur Entstehung mehrerer Bogen nöthige Form enthielte.“

In der neuen Ausgabe des Physikalischen Wörterbuchs von Gehler. Band VII. Abth. 2. S. 1333. bemerkt Brandes noch:

„Ein anderer Einwurf ist, dass diese Nebenbogen sich gegen den untern Theil des Regenbogens nicht allmählig an ihn anschliessen (wie es wegen der je mehr und mehr kreisförmigen Querschnitte der Fall sein sollte), sondern gleich entfernt bleiben, aber immer matter sich endlich ganz verlieren.“

„Der Gedanke, dass eine genaue Kenntniss der Gestalt der Tropfen dieser Untersuchung zur Grundlage dienen müsse, welchen ich einmal gegen den Professor Scholz äusserte, veranlasste diesen seine Abhandlung: *De figura guttae cadentis in aëre resistente* (Bresl. 1826.) zu schreiben.“

Man wird aus diesen Andeutungen mit hinreichender Deutlichkeit erkennen, worin Venturi's Erklärung der Hauptsache nach besteht. Wenn dieselbe auch keineswegs von Zweifeln frei ist, so scheint sie mir doch immer noch eine sorgfältigere Prüfung, als bisher geschehen ist, durch Beobachtung und Rechnung zu verdienen; und da mir die von Venturi gegebenen mathematischen Entwicklungen an vielen Schwächen zu leiden scheinen, so habe ich im Obigen (§. 10. ff. und §. 23. ff.) die Brechung und Zurückwerfung in elliptischen Tropfen einer ausführlichen sorgfältigen Untersuchung unterworfen, spare aber die Anwendung der von mir entwickelten Formeln zur genaueren Prüfung der von Venturi gegebenen Erklärung für spätere besondere, diesem Gegenstande gewidmete Aufsätze auf.

#### §. 42.

Als ein Interferenzphänomen hat zuerst Thomas Young die secundären oder überzähligen Regenbogen betrachtet, und sagt darüber (Gilbert's Annalen der Physik. Band XXXIX. Leipzig. 1811. S. 272.) Folgendes.

„Die Wiederholung der Farben, die zuweilen in dem gemeinen Regenbogen bemerkt werden, und welche D. Langwith und Herr Daval in den Philosophical Transactions beschrieben haben, lassen sich ebenfalls leicht und vollständig aus denselben Grundsätzen erklären. D. Pemberton hat sich bemüht, eine Aehnlichkeit zwi-



schen diesen Farben und den Farben dünner Scheiben zu zeigen; aber die unregelmässige Reflexion von der hintern Fläche des Tropfens, welcher er die Erscheinung ganz allein zuschreibt, muss sehr viel zu schwach sein, um sichtbare Effecte hervorzubringen. Um diese Erscheinung zu begreifen, dürfen wir bloss auf die beiden Lichtbündel sehen, welche in den bekannten erklärenden Vorstellungen des Regenbogens angegeben werden, und welche von der hintern Fläche des Tropfens regelmässig reflectirt sich einander in verschiedenen Richtungen durchschneiden, bis sie unter dem Winkel der grössten Ablenkung mit einander zusammenfallen, wo sie, vermöge der grössern Dichtigkeit des verdoppelten Lichts, den gewöhnlichen Regenbogen für 41 Grade hervorbringen. Andere Theile dieser beiden Bündel verlassen den Tropfen nach Richtungen, die einander parallel sind, und diese verursachen eine fortgesetzte Verbreitung eines schwächern Lichts auf 25° innerhalb der hellen Grenze, welche den Regenbogen bildet, wiewohl nach dem allgemeinen Gesetze der Vermischung, welche, wie in andern ähnlichen Fällen, das Licht in concentrische Ringe vertheilt. Die Grösse dieser Ringe hängt von der Grösse der Tropfen ab, nach Maassgabe der Differenz der Zeit, welche die beiden Lichtbündel in ihrem Fortgange verwenden, die solchergestalt nach parallelen Richtungen in das Auge des Beobachters gelangen, nachdem sie in dem Tropfen verschiedentlich gebrochen und reflectirt worden sind. Diese Differenz verändert sich anfänglich beinahe wie das Quadrat der Entfernung in Graden von dem Hauptregenbogen; wenn aber das erste Nebenroth sich nur 2 Grad von dem Roth des Regenbogens entfernt befindet, dass es sich etwas mit dem Violet des ersten Regenbogens vermischt, so wird die vierte Nebenröthe in einer beinahe um 2 Grad grössern Entfernung erscheinen, und die mittlern Farben werden einen dem ersten Regenbogen beinahe gleichen Raum einnehmen. Um diesen Effect hervorzubringen, müssen die Tropfen  $\frac{1}{76}$  eines Zolls oder 0,013 im Durchmesser halten; sie dürfen auch nur zwischen  $\frac{1}{70}$  bis  $\frac{1}{80}$  Zoll betragen. Die Ursache, warum dergleichen Nebenregenbogen nicht öfter gesehen werden, muss in der Seltenheit des Ereignisses liegen, dass Tropfen von beinahe gleicher Grösse sich neben einander befinden; dass sich aber dieses zuweilen ereignen kann, dieses ist an sich gar nicht unwahrscheinlich. Wir messen ja auch die Medicin ab, indem wir sie aus einem Glase tropfen lassen, und man kann sich leicht vorstellen, dass die von der Natur gebildeten Tropfen zuweilen eben so gleichförmig sein können, als die durch Kunst hervorgebrach-



ten. Wie genau diese Theorie mit den Beobachtungen übereintrifft, kann man am besten aus D. Langwith's eigenen Worten sehen.“

„„Den 21. August 1722 Abends halb 6 Uhr, bei gemässiger Witterung und nordöstlichem Winde, war die Erscheinung folgende: Die Farben des ersten Regenbogens waren wie gewöhnlich, nur das Purpur näherte sich mehr dem Rothen und war gut begrenzt; unter diesem stand ein Bogen von Grün, dessen oberer Theil in ein helles Gelb und der untere in ein dunkleres Grün überging; unter diesen waren abwechselnd zwei Bogen von röthlich Purpur und zwei von Grün; und unter allen ein schwacher Schein eines andern purpurnen Bogens, welcher verschwand und verschiedene Male so geschwind wieder erschien, dass wir fast nicht so geschwind sehen konnten. Solchem nach wäre die Ordnung der Farben: 1) Roth, Orange, Gelb, Grün, hell Blau, dunkel Blau, Purpur; 2) liches Grün, dunkel Grün, Purpur; 3) Grün, Purpur; 4) Grün, schwach verschwindender Purpur. Wir sehen hier vier Farbenreihen und vielleicht auch den Anfang einer fünften; denn ich bin überzeugt, dass die Farbe, welche ich Purpur nenne, eine Mischung aus dem Purpur der obern und aus dem Roth der nächsten untern Reihe, und dass das Grün eine Mischung der mittlern Farben gewesen sei. Bei dieser Beschreibung verlasse ich mich nicht ganz allein auf das Zeugniß meiner Augen; denn es befanden sich ein Geistlicher und vier andere Herren in meiner Gesellschaft, die ich bat, auf die Farben genau aufmerksam zu sein, und die alle übereinstimmten, dass die Erscheinung so gewesen sei, wie ich sie jetzt beschrieben habe. Es giebt hier zwei Umstände, welche wohl verdienen bemerkt zu werden, da sie uns vielleicht einigermaßen auf die Auflösung dieser merkwürdigen Erscheinung führen können. Der erste ist: Dass die Breite der ersten Reihe eine jede der übrigen so sehr übertrifft, dass, so viel man beurtheilen konnte, sie allen den übrigen zusammengenommen gleich war. Der zweite ist: dass ich niemals dieselbe innere Farbenordnung in den untern Theilen des Regenbogens gesehen habe, ob sie gleich oft viel lebhafter waren, als die obern Theile, wo sich die Farben zeigten. Ich habe dieselben so oft beobachtet, dass ich sie schwerlich als zufällig betrachten kann; sollten sie sich aber allgemein als wahr zeigen, so würden sie die Untersuchung sehr verkürzen, denn sie würden zeigen, dass diese Effecte von einer Eigenschaft abhängen, welche die Tropfen beibehalten, so lange sie sich in der obern Luftregion befinden, die sie aber verlieren, wenn sie sich heruntersinken



und mehr mit einander vermischt sind (Philosophical Transactions. Vol. XXXII. London. 1724. p. 241.)“““

„Aus der Betrachtung der Natur eines Nebenregenbogens von  $54^{\circ}$  kann man schliessen, dass, wenn einige solcher überzähligen Farben bei diesem Regenbogen gesehen werden, sie sich ausserhalb desselben, statt innerhalb, zeigen werden. Die Ringe, welche zuweilen den Schatten des Beobachters in einem Nebel umgeben, sind vielleicht mit mehrerem Rechte mit den gewöhnlichen Farben dünner Scheiben, als mit den durch Reflexion gesehenen zu vergleichen.“

In dem Annuaire von 1836 tritt Arago der vorhergehenden von Young gegebenen Erklärung bei, und spricht sich über dieselbe auf folgende Art aus.

„Die überzähligen Bogen scheinen eine Wirkung von Lichtinterferenzen zu sein, und diese Interferenzen können nur durch Tropfen von gewisser Kleinheit erzeugt werden. Auch müssen, damit das Phänomen einige Intensität habe, die Regentropfen nicht nur die erforderliche Grösse besitzen, sondern auch, wenigstens der Mehrzahl nach, die Bedingung einer fast mathematischen Gleichheit der Dimensionen erfüllen. Wenn also die Regenbogen der Aequinoxial-Regionen fast nie diese supernumeraren Farbenbogen zeigten, so wäre dies ein Beweis, dass sich dort grössere und ungleichere Regentropfen von den Wolken ablösten als in unserem Klima. In der Unwissenheit, in welcher wir hinsichtlich der Ursache des Regens leben, würde diese Angabe nicht ohne Interesse sein.

Steht die Sonne tief, so steht dagegen der obere Theil des Regenbogens sehr hoch, und in diesem Scheitel zeigen sich die überzähligen Farben in ihrem vollen Glanze. Von da an nehmen sie rasch ab. In den unteren Regionen, gegen den Horizont, selbst noch ziemlich über demselben, gewahrt man, wenigstens in Europa, niemals eine Spur von ihnen. Es müssen also die Regentropfen während ihres senkrechten Falls die Eigenschaft verlieren, welche sie zuvor besaßen; sie müssen den Bedingungen zu wirksamen Lichtinterferenzen nicht mehr genügen, kurz sich vergrössert haben. Ist es, beiläufig gesagt, nicht sonderbar, in einer optischen Erscheinung, in einer Particularität des Regenbogens, den Beweis zu finden, dass in Europa die Regenmenge desto geringer sein muss, je höher der Behälter steht, in welcher man sie auffängt.



Die Vergrößerung der Tropfen rührt ohne Zweifel davon her, dass sich Feuchtigkeit auf ihre Oberfläche niederschlägt, in dem Maasse als sie aus den kalten Regionen ihrer Entstehung die wärmeren Luftschichten näher an der Erde durchfallen. Es ist also gewiss, dass wenn sich in den Aequinoxial-Regionen, wie in Europa, überzählige Regenbogen bilden, diese niemals den Horizont erreichen können; allein es scheint, dass der Vergleich des Winkels, bei welchem sie aufhören sichtbar zu sein, mit dem Winkel, bei welchen sie in unsern Klimaten verschwinden, zu meteorologischen Resultaten führen werde, die keine andere bisher bekannte Methode zu liefern im Stande ist.“ (Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Band XXXVII. Leipzig. 1836. S. 455.).

In einem aus den Transactions of the Cambridge Philosoph. Society. Vol. VI. p. 379. in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Ergänzungsband. Leipzig. 1842. S. 232. übersetzten Aufsätze: Ueber die Intensität des Lichts in der Nähe einer Brennnlinie, hat Airy der obigen Erklärung durch die strenge Anwendung der mathematischen Undulationstheorie eine neue Stütze zu geben versucht, worüber ich aber begreiflicherweise in der vorliegenden Abhandlung, ohne mich in zu grosse Weitläufigkeiten zu verlieren, nichts weiter sagen kann. Miller und Galle (Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Band LIII, S. 214. und Band LXIII. S. 342.) haben aber die von Airy gegebene Theorie durch genaue Messungen zu bestätigen sich bemühet.

### §. 43.

Erwähnen muss ich endlich noch einen von Brandes zuerst in Gilbert's Annalen der Physik. Band XIX. S. 464. gegebenen, und dann sowohl in dem Physikalischen Wörterbuche. Band VII. Abth. 2. S. 1333., als auch namentlich in den oben angeführten Vorlesungen über die Naturlehre. S. 498 wiederholten Erklärungsversuch.

„Da alle diese Erklärungen“ — sagt Brandes im Physikalischen Wörterbuche a. a. O. — „nicht genügend scheinen, so bin ich öfter wieder zu einem Erklärungsversuche zurückgekehrt, den ich schon vor langer Zeit bekannt gemacht habe; indess, da auch dieser mir nicht genug sichere Gründe für sich zu haben scheint, so will ich ihn nur kurz erwähnen. Wir sehen so oft,



wenn die Sonne mit dünnen Wolken bedeckt ist, Höfe von der Art, deren Durchmesser nur wenige Grade beträgt, um die Sonne; die Farben dieser Höfe sind, wie man am besten an der im Wasser gespiegelten Sonne sieht, von sehr glänzenden Farben, und Grün und Violett sind vorzüglich darin kenntlich. Die Strahlen, die unserem Auge diese Höfe zeigen, fallen auch auf die Regentropfen, und ein Punkt des grünen Hofs sollte einen grünen Regenbogen, ein Punkt des violetten Hofs einen violetten Regenbogen u. s. w. hervorbringen. Denken wir nun zuerst nur an Punkte des Hofs, die gerade über der Sonne stehen, so würden diese einen innern Nebenbogen hervorbringen, und diesen vorzüglich nur durch die stärker brechbaren Farben, Grün, Blau, Violett, weil der rothe und gelbe Bogen sich mit dem Blau und Violett des Hauptbogens mischen und unkenntlich werden würde. Betrachten wir ferner die unter der Sonne stehenden Theile des Rings, so sollten diese einen Nebenbogen oberhalb des Hauptbogens hervorbringen; aber dieser Nebenbogen erscheint erstlich in Beziehung auf das Grün, Blau, Violett nicht, weil diese Farben von einem nicht sehr grossen Hofe, nicht sehr entfernt von der Sonne, ausgehend noch auf den Hauptbogen fallen würden, und zweitens auch in Beziehung auf das Roth nicht, weil nach der Ordnung, welche die Farben in den Höfen beobachten, der aus dem grünen oder violetten Hofe hervorgehende, oberhalb des Hauptbogens liegende Nebenbogen sich mit dem rothen verbindet und daher keine Farbe kenntlich bleibt. So kann an der obern Seite des Regenbogens kein Nebenbogen entstehen, weil hier die den verschiedenen Farben des Hofs entsprechenden Nebenbogen auf einander fallen, wogegen sie an der inneren Seite stärker getrennt erscheinen. Diese Betrachtung scheint einiges Vertrauen für diese Erklärung zu erwecken, aber es bleiben dennoch Schwierigkeiten übrig, die theils in der Schwäche jener Höfe, theils in dem Umstande liegen, dass die Nebenbogen nur am höheren Theile des Bogens erscheinen. Diese Nebenbogen verdienen daher immer noch genau beobachtet zu werden, indem die Aufmerksamkeit auf alle Umstände vielleicht zu einem genügenden Erklärungsgrunde führt.“

In den Vorlesungen über die Naturlehre. S. 498., seinem neuesten Werke, scheint Brandes geneigt zu sein, der vorhergehenden Erklärung den Vorzug vor allen übrigen zu geben.

Helwag (Abhandlung von vielfachen Regenbogen im Neuen deutschen Museum. 1790. S. 420.) ist der Meinung,



dass Wellen auf der Oberfläche der Regentropfen die Veranlassung zur Entstehung der secundären Bogen geben könnten.

Jedenfalls sieht man aus diesen verschiedenen sehr von einander abweichenden Erklärungen der secundären Bogen, dass hier noch ein weites Feld zu physikalischen Untersuchungen und Forschungen vorliegt, dessen Bebauung die Physiker sich mehr als bisher angelegen sein lassen sollten.

---

## II.

### Miscellen.

---

#### Ueber die Krystallform des Eises.

In dem

Jahresbericht über die Fortschritte der physischen Wissenschaften von Jacob Berzelius. Aus dem Schwedischen übersetzt von C. G. Gmelin. Dritter Jahrgang. Tübingen. 1824. S. 57.

finden sich die folgenden Bemerkungen über die Krystallform des Eises.

„Wir sehen unaufhörlich alle Jahre das Wasser durch die Winterkälte an unsern Fenstern krystallisiren, und Eisnadeln auf der Oberfläche des Wassers sich bilden, ehe das Ganze zu Einer Masse erstarrt; von Schneeflocken hat man mehr als 200 verschiedene regelmässige Formen wahrgenommen und verzeichnet, und bei allem diesen hat man dennoch über die wirkliche Form des am allgemeinsten vorkommenden krystallisirenden Stoffes mit Gewissheit nicht mehr bestimmen können, als dass die Eisnadeln von einander unter Winkeln von  $60^{\circ}$  und  $120^{\circ}$  ausschliessen. Hauy schloss daraus, dass die primitive Krystallform ganz dieselbe sein könnte, wie die des Flusspaths, d. h. dass sie aus tetraëdrischen Molecülen bestehe, die zu regelmässigen Octaëdern zusammengefügt sind. Hericart de Thury fand in der natürlichen Eisgrube bei Fondeurle in der Dauphiné eine Menge von Eiskrystallen, welche sechsseitige Prismen bildeten, deren Endfläche Streifen hatte, welche mit den Seitenflächen parallel waren, und deren Endkanten bisweilen durch



Facetten ersetzt waren, aber nirgends fand sich eine ausgebildete pyramidalische Zuspitzung. Clarke in Cambridge beobachtete an einem Januarstage 1822 bei  $\frac{1}{2}$  Grad Kälte eine Menge von Krystall-Facetten an Eiszapfen, welche unter einer hölzernen Brücke hingen, in der Nähe eines Wasserfalls, der unaufhörlich eine Art von Nebel bildete, dessen Theile nachher an den Eiszapfen unter der Brücke anschossen. Man nahm diese weg und fand, dass sie vollkommene rhomboidalische Krystalle bildeten, deren Winkel, mit dem Goniometer gemessen,  $60^\circ$  und  $120^\circ$  waren. Diese Krystalle erhielten sich mehrere Tage, so dass die Erscheinung von mehreren Mitgliedern der wissenschaftlichen Gesellschaft zu Cambridge bewährt werden konnte, und als nachher Thauwetter einfiel, behielten die Krystalle während ihres Schmelzens beständig die rhomboidalische Form bei. Die vornehmste Ursache, warum man so selten regelmässige Krystalle von Eis zu sehen bekommt, scheint die zu sein, dass sie immer an der Oberfläche im Wasser sich bilden, und mithin von Theilen umgeben sind, welche eben so stark sich bestreben, die feste Form anzunehmen und sich zu agglutiniren, so dass sich die Krystalle darin nicht anders als in einer und derselben Horizontalebene verlängern können; auch geht diese Krystallisation gewöhnlich zu schnell vor sich. Man kann daher hauptsächlich eben in solchen Fällen, wo das Wasser langsam aus der Luft an kalten festen Körpern anschiesst, eine deutliche Form erwarten, wenn dieser Zustand so lange fort dauert, dass die Krystalle gross werden können, welches wiederum selten der Fall ist.“

---

#### D r u c k f e h l e r.

S. 8. Z. 9. statt  $\Omega (= n\pi - 2\omega)$  setze man  $\Omega = n(\pi - 2\omega)$ .

S. 20. Z. 14. statt  $\text{tangi} = (n + i) \text{tangi}_1$  setze man  $\text{tangi} = (n + 1) \text{tangi}_1$ .



Grunert, Johann August,

Beiträge zur meteorologischen Optik u. zu verwandten Wissenschaften In  
zwanglosen Heften

Bd.: 1,1

Lpzg 1848 - 50

Math.a. 93 qc-1,1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080738-3